

Bachelorarbeit

Hohe Gütefaktoren in Split-Ring-Resonatoren

Ausgeführt am Institut für Festkörperphysik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Univ.Prof. Dr.rer.nat. Andrei Pimenov und
Dipl.-Phys. Sebastian Engelbrecht

durch

Florian Kraushofer

Wien, 27. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Messverfahren	3
2.1	Terahertzspektroskopie	3
2.2	Matrix-Formalismus	6
3	Probensystem	10
3.1	Split-Ring-Resonatoren	10
3.2	Mathematische Modellierung	11
4	Messergebnisse und Interpretation	12
4.1	Gold	12
4.2	Niob	16
4.3	Vergleich der Proben	24
5	Zusammenfassung	25

1 Einleitung

Metamaterialien sind Verbundmaterialien aus künstlich hergestellten Strukturen, die mit elektromagnetischen Wellen auf eine Art und Weise wechselwirken, die mit herkömmlichen Materialien nicht erreichbar ist. Die verwendeten Strukturen können dabei als homogen angenommen werden, da sie wesentlich kleiner sind als die Wellenlängen der verwendeten elektromagnetischen Wellen. Dies erlaubt eine Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften der Metamaterialien über makroskopische Parameter, wie die elektrische Permittivität ϵ und die magnetische Permeabilität μ .

Ein wesentliches Interesse an Metamaterialien wurde insbesondere durch die Möglichkeit einer negativen Brechzahl hervorgerufen. Diese wird erreicht, wenn sowohl ϵ als auch μ negativ sind [1].

Während negative ϵ in der Natur relativ häufig vorkommen (zum Beispiel in vielen Metallen unterhalb der Plasmafrequenz), sind negative μ ungewöhnlich und auch mit Metamaterialien nur in bestimmten Resonanzen zu erreichen. Für einige Anwendungen (z.B. Sensorik) ist es nun erwünscht, möglichst scharfe Resonanzen zu erreichen. Die Schärfe einer Resonanz lässt sich über ihren Gütefaktor (Q-Faktor) beschreiben. Dieser ist definiert als:

$$Q = \frac{f_0}{\gamma} \quad (1.1)$$

wobei f_0 die Resonanzfrequenz und γ die Bandbreite ist. Physikalisch gesehen gibt der Q-Faktor das Verhältnis von im Resonator gespeicherter Energie zu seinen Verlusten wieder.

Ziel dieser Arbeit war es, bei Terahertzspektroskopie von Split-Ring-Resonatoren (SRRs, siehe Abschnitt 3.1) außergewöhnlich hohe Gütefaktoren der Resonanz zu erzielen. Um dies zu erreichen, wurden anstelle der klassisch symmetrischen SRRs asymmetrische Split-Ring-Resonatoren (aSRRs) herangezogen, da diese eine wesentlich schwächere Kopplung mit dem einfallenden Elektromagnetischen Feld (EM-Feld) und damit schärfere Resonanzen zeigen [2].

Gemessen wurden Strukturen aus Gold und Niob, wobei die Niob-Proben unter anderem im supraleitendem Zustand betrachtet wurden, um durch Ausschalten der ohm'schen Verluste stärkere Resonanzen zu erreichen.

2 Messverfahren

2.1 Terahertzspektroskopie

Zur Untersuchung der optischen Eigenschaften der Proben wurde ein Spektrometer vom Typ „Epsilon“ verwendet, wie es in [4] beschrieben wird. Dieses bietet neben kurzen Messzeiten bei gleichzeitig hoher Präzision und Reproduzierbarkeit auch den Vorteil, dass es auf einem weiten Frequenzspektrum

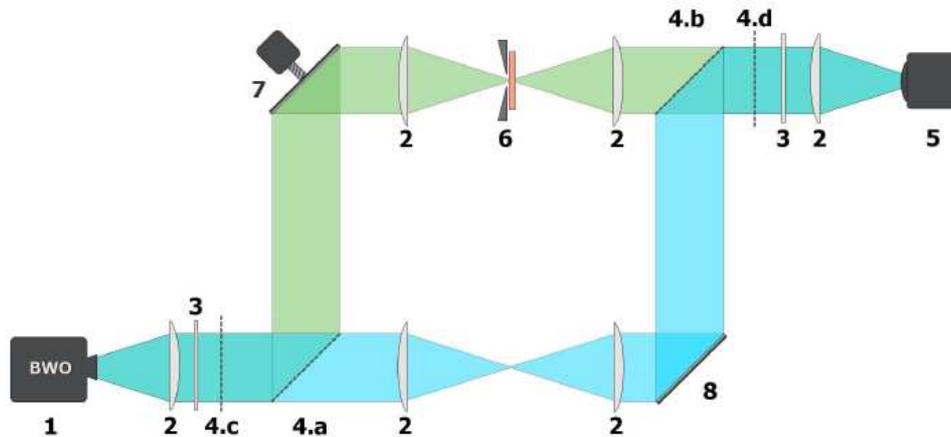


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Terahertzspektrometers: **1** - BWO-Quelle, **2** - PE-Linsen, **3** - Dämpfer, **4** - Polarisatoren, **5** - Detektor, **6** - Probenhalter mit Diaphragma und Probe, **7** - Spiegel (Phasenkompensator), **8** - Spiegel (Phasenmodulator) [3]

anwendbar ist. Der Aufbau ist in Abb. 1 schematisch dargestellt und entspricht in den Grundzügen dem eines Mach-Zehnder-Interferometers.

Enthalten sind folgende Teile:

(1) **BWO-Quelle:** durch austauschbare Quellen kann ein weiter Frequenzbereich abgedeckt werden.

(2) **Linsen:** dielektrische Polyethylen-Linsen¹ zur Fokussierung des Strahls.

(3) **Dämpfer:** Dämpfer bestehend aus Metallfilmen, die auf Mylar-Folien abgeschieden werden. Die Dämpfer besitzen verschiedene frequenzunabhängige Transmissionskoeffizienten (1%, 3%, 10% und 30%).

(4) **Polarisatoren:** Drahtgitter-Polarisatoren mit Gitterperiode $L \ll \lambda$. Werden als Polarisator, Analysator bzw. auch als Strahlteiler genutzt.

(5) **Detektor:** Ein Bolometer, das als Detektor dient.

(6) **Probenhalter:** Ein Probenhalter mit austauschbaren Diaphragmen unterschiedlicher Durchmesser, auf denen die Proben platziert werden. Die Strahlengänge lassen sich auch problemlos vertauschen. Im anderen Strahlengang befindet sich ein Kryostat, in dem Proben bis auf ca. 2 K abgekühlt werden können. Außerdem kann über einen Elektromagneten ein Magnetfeld angelegt werden.

(7) **Phasenkompensator-Spiegel:** Ein Spiegel mit Schrittmotor, der von einem Rechner gesteuert wird.

(8) **Phasenmodulator-Spiegel:** Ein Spiegel, der sich manuell mit einer Mikrometerschraube verstellen lässt und der über Lautsprecher zur Vibration gebracht wird.

¹optische Eigenschaften von Polyethylen bei $f = 300\text{GHz}$ [4]:
 $n = 1,41$; $k = 0,0006$; $\Re(\epsilon) = 1,99$; $\Im(\epsilon) = 0,0017$; $R = 0,03$

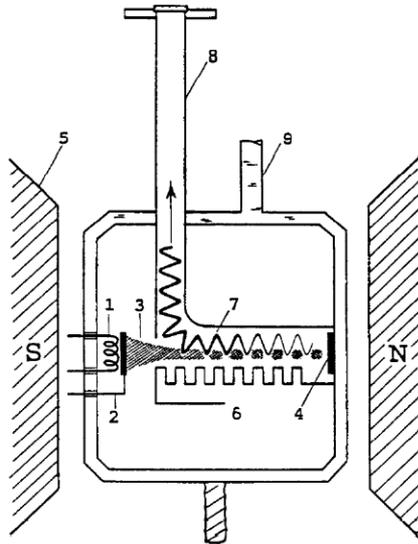


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Backward-wave Oszillators [4]

- 1 - Heizung
- 2 - Kathode
- 3 - Elektronenstrahl
- 4 - Anode
- 5 - Magnet
- 6 - Verzögerungseinheit
- 7 - rückwärtslaufende EM-Welle
- 8 - Wellenleiter
- 9 - Wasserkühlung

Als Quellen dienen sogenannte Backward Wave Oscillators (BWOs), die zur Klasse der Laufzeitröhren gehören. Die von BWOs emittierte Strahlung ist sehr monochromatisch ($\Delta f/f \approx 10^{-5}$), hat einen hohen Polarisationsgrad (99,99%) und ist auf einem großen Frequenzbereich elektrisch durchstimmbare [4].

Der Aufbau einer BWO-Quelle ist in Abb. 2 schematisch dargestellt. In einer evakuierten Elektronenstrahlröhre werden von einer beheizten Kathode (2) Elektronen (3) emittiert, die in einer Hochspannung zwischen Kathode und Anode (4) beschleunigt werden. Der Strahl wird durch einen Magneten (5) fokussiert und von einer kammförmig strukturierten Elektrode (6) in einem periodischen Potential abgebremst. Dadurch wird der Strahl in Bündel separiert, die eine elektromagnetische Welle (7) abstrahlen. Da diese Welle sich in entgegengesetzter Richtung zum Elektronenstrahl ausbreitet, wird sie als *backward wave* bezeichnet. Über einen Wellenleiter (8) gelangt die Welle zu einer Antenne und wird abgestrahlt.

Für die Frequenz der abgestrahlten Welle gilt die Relation $f \propto \sqrt{U}$, wobei U die Beschleunigungsspannung ist. Das Leistungsspektrum variiert stark und ist für jede BWO einzigartig, lässt sich aber gut reproduzieren.

Die Messung erfolgt nach dem Lock-In-Prinzip, wobei ein Chopper für Transmissionsmessung und ein vibrierender Spiegel als Modulator für Phasenmessung eingesetzt werden. Um die Transmission zu messen, wird der Strahlengang, in dem sich keine Probe befindet, abgeschirmt und die Intensität gemessen. Es erfolgen prinzipiell immer eine Messung mit und eine ohne Probe, um auf Ausgangsintensität und Charakteristik der BWO-Quelle kalibrieren.

Bei der Phasenmessung wird zunächst mit dem Phasenkompensator-Spiegel ein Minimum der Interferenz zwischen den beiden Strahlengängen gesucht und dann während der Messung verfolgt. Über den Spiegelweg lässt sich dann die Phasenverschiebung berechnen.

2.2 Matrix-Formalismus

Die Grundlage zur Beschreibung der Transmissionsspektren bilden die Maxwell-Gleichungen. In isotropen Materialien, in denen keine freien Ladungen und Ströme vorhanden sind, lauten diese:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \vec{D} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (2.4)$$

Es sind dabei \vec{B} und \vec{D} die magnetische bzw. elektrische Flussdichte, sowie \vec{H} und \vec{E} die magnetische bzw. elektrische Feldstärke.

Bei linearen Medien, deren elektromagnetische Eigenschaften durch ϵ und μ gegeben sind, gelten folgende Beziehungen:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad (2.6)$$

Beim Übergang zwischen zwei Medien müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke stetig sein, es gilt also:

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2} \quad (2.7)$$

Mit Gl. 2.3 folgt daraus unmittelbar die Stetigkeit der Normalkomponenten der magnetischen Flussdichte \vec{B} :

$$\vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2} \quad (2.8)$$

Aus der Annahme, dass in der Grenzfläche keine elektrischen Flächenströme existieren, folgt analog für die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke:

$$\vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2} \quad (2.9)$$

und mit Gl. 2.4:

$$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2} \quad (2.10)$$

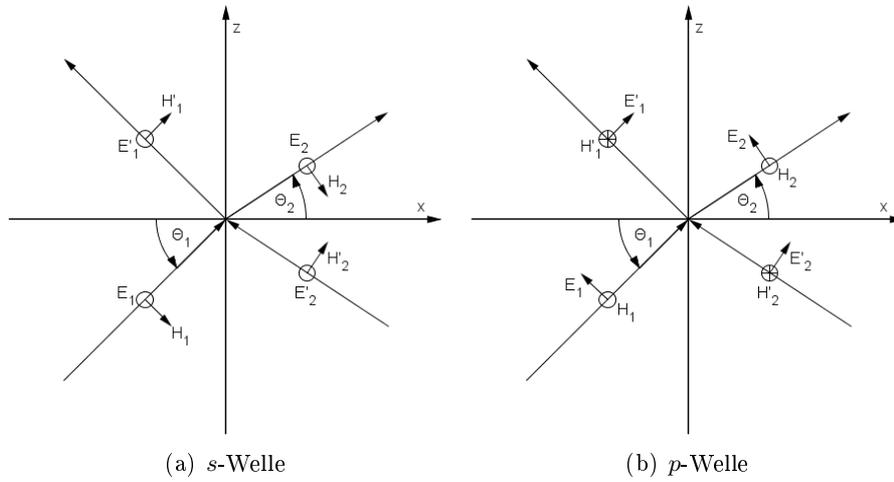


Abbildung 3: Reflexion und Brechung von s - und p -Wellen

Fällt eine Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, so kann sie als Superposition zwischen einfallenden und austretenden Wellen auf beiden Seiten der Grenzfläche (siehe Abb. 3) beschrieben werden:

$$\vec{E} = \begin{cases} (\vec{E}_1 e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} + \vec{E}'_1 e^{-i\vec{k}'_1 \vec{r}}) e^{i\omega t}, & x < 0 \\ (\vec{E}_2 e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}} + \vec{E}'_2 e^{-i\vec{k}'_2 \vec{r}}) e^{i\omega t}, & x > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Um die Übergangsbedingungen zu erhalten, kann man Gl. 2.3 mit $\vec{B} = \mu \vec{H}$ anders schreiben als:

$$\vec{H} = \frac{i}{\omega \mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2.12)$$

Nun betrachten wir zunächst jenen Anteil der Welle, bei dem der elektrische Feldvektor \vec{E} transversal auf die Einfallsebene steht. Dieser Anteil wird als TE- oder s -Welle bezeichnet. Mit Gln. 2.12, 2.7 und 2.8 lässt sich für die s -Welle folgendes Gleichungssystem ableiten:

$$E_{1s} + E'_{1s} = E_{2s} + E'_{2s} \quad (2.13)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (E_{1s} - E'_{1s}) \cos \Theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (E_{2s} - E'_{2s}) \cos \Theta_2 \quad (2.14)$$

Dabei sind Θ_1 und Θ_2 die Winkel der Wellenvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 . Das Gleichungssystem kann nun umgeschrieben werden als:

$$D_1^s \begin{pmatrix} E_{1s} \\ E'_{1s} \end{pmatrix} = D_2^s \begin{pmatrix} E_{2s} \\ E'_{2s} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

mit

$$D_i^s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \Theta_i & -\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \cos \Theta_i \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Für die TM- oder p -Welle, bei der der magnetische Feldvektor \vec{H} transversal zur Einfallsebene steht, gilt weitgehend analog:

$$(E_{1p} + E'_{1p}) \cos \Theta_1 = (E_{2p} + E'_{2p}) \cos \Theta_2 \quad (2.17)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}(E_{1p} - E'_{1p}) = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}(E_{2p} - E'_{2p}) \quad (2.18)$$

was wiederum formuliert werden kann als

$$D_1^p \begin{pmatrix} E_{1p} \\ E'_{1p} \end{pmatrix} = D_2^p \begin{pmatrix} E_{2p} \\ E'_{2p} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

mit

$$D_i^p = \begin{pmatrix} \cos \Theta_i & \cos \Theta_i \\ \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} & -\sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Da bei den Versuchen zu dieser Arbeit nur Messungen mit Strahlrichtung senkrecht zur Oberfläche der Proben vorgenommen wurden, wird ab hier $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ angenommen, wodurch sich der Matrix-Formalismus wesentlich vereinfacht, da dann $D_i^s = D_i^p$ gilt.

Der große Vorteil des hier angewandten Formalismus ist, dass er sich sehr leicht auf mehrere Schichten (in diesem Fall zwei) erweitern lässt. Es ist aus Gl. 2.15 bzw. 2.19 klar ersichtlich, dass sich der linke Teil der Welle beschreiben lässt als

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} =: D_{12} \begin{pmatrix} E_2 \\ E'_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Die allgemeine Übergangsmatrix D_{mn} ergibt sich durch einfaches Ausrechnen mit $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ zu

$$D_{mn} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_n}{\mu_n}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}}} & 1 - \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_n}{\mu_n}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}}} \\ 1 - \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_n}{\mu_n}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}}} & 1 + \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_n}{\mu_n}}}{\sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}}} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Wenn auf diesem Weg einfallende, reflektierte und austretende Wellen links und rechts von einer Probe in Relation gesetzt werden sollen, muss zusätzlich noch die Propagation der Welle innerhalb der Probe beachtet werden. Dies

wird auf einfache Art und Weise erreicht, indem man eine Propagationsmatrix P_i definiert:

$$P_n = \begin{pmatrix} e^{i\phi_n} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_n} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

mit $\phi_n = \sqrt{\epsilon_n \mu_n} d_n \omega$, wobei d_n die Schichtdicke ist.

Für eine Welle, die durch ein System aus zwei Schichten tritt, ergibt sich also die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = D_{12} P_2 D_{23} P_3 D_{34} \begin{pmatrix} E_4 \\ E'_4 \end{pmatrix} =: \tilde{M} \begin{pmatrix} E_4 \\ E'_4 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

mit der Übergangsmatrix \tilde{M} . Betrachten wir nun einen Strahl, der von rechts einfällt und dessen Intensität auf 1 normiert ist, so lautet die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & r m_{12} \\ m_{21} & r m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

mit $M = \tilde{M}^{-1}$ und den komplexen Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten r und f . Ausrechnen ergibt:

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (2.26)$$

$$t = \frac{\det M}{m_{22}} \quad (2.27)$$

Es lässt sich zeigen, dass für $\epsilon_1 = \epsilon_4$ und $\mu_1 = \mu_4$ gilt:

$$\det M = \det \tilde{M} = 1 \quad (2.28)$$

Dazu betrachten wir noch einmal \tilde{M} . Wegen $\det AB = \det A \det B$ gilt:

$$\det \tilde{M} = \det(D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_3 P_3 D_3^{-1} D_4) \quad (2.29)$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (2.30)$$

$$\det P_n = 1 \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \det \tilde{M} = \det D_1^{-1} \det D_4 = 1 \quad (2.32)$$

Wegen 2.30 ist damit auch $\det M = 1$, daher gilt:

$$r = -\frac{m_{21}}{m_{22}} \quad (2.33)$$

$$t = \frac{1}{m_{22}} \quad (2.34)$$

Die Variablen r und t haben dabei die Form $t = t_0 e^{i\phi}$. Gemessen werden im Versuchsaufbau dieser Arbeit immer die Transmission $T = |t_0|^2$ und die Phase ϕ .

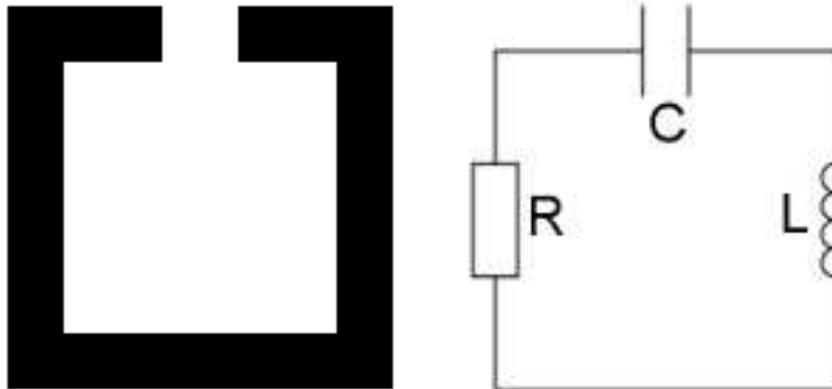


Abbildung 4: Darstellung eines SRR (links) als RLC-Schwingkreis (rechts)

3 Probensystem

3.1 Split-Ring-Resonatoren

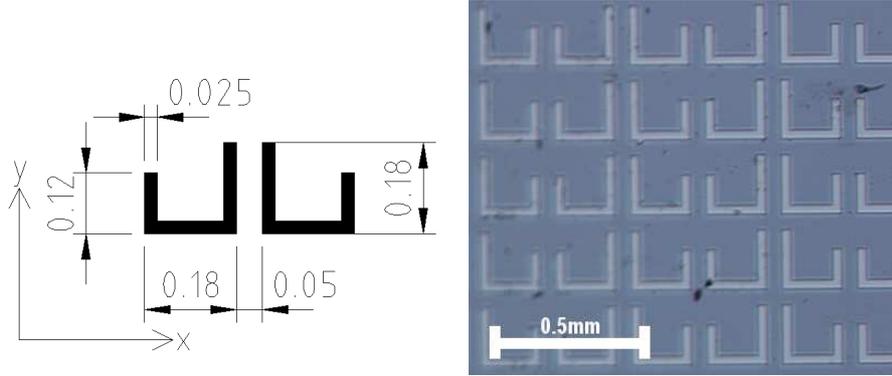
Die in dieser Arbeit untersuchten Strukturen sind eine Abwandlung von Split-Ring-Resonatoren (SRRs), deren Eigenschaften in diesem Abschnitt kurz behandelt werden sollen. In Abb. 4 ist schematisch ein SRR dargestellt, der als elektrischer Schwingkreis beschrieben werden kann, für den gilt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.1)$$

In diesem Modell ist die Induktivität L in erster Linie durch die vom Ring umschlossene Fläche bestimmt, während die Kapazität C vor allem von den Dimensionen des Spaltes abhängt. Die Induktivität bedingt dabei, dass die Strukturen ein magnetisches Ansprechverhalten zeigen können, obwohl sie selbst nicht aus einem magnetischen Material bestehen.

Wie in [2] dargelegt wird, lässt sich die Kopplung der SRRs mit dem einfallenden E-Feld wesentlich verringern, wenn man den Spalt aus der Symmetrieachse verschiebt. Die schwächere Kopplung sollte zu wesentlich schärferen Resonanzen der Strukturen führen.

Im Zuge dieser Arbeit wurden Strukturen aus Niob und Gold mit einer Dicke von etwa 200 nm untersucht, bei denen eine Seite vollständig durch einen Spalt ersetzt und eine Asymmetrie durch verschieden lange Arme erreicht wurde. Abb. 5 zeigt schematisch Aufbau und Abmessungen der Strukturen, sowie eine Mikroskopaufnahme einer der untersuchten Proben aus Niob. Sowohl Gold als auch Niob wurden einmal mit der hier gezeigten Geometrie sowie einmal mit einer Verlängerung des kürzeren Arms (in Abb. 5: 0.12 mm) auf 0.15 mm untersucht.



(a) Abmessungen der untersuchten Strukturen in mm (b) Mikroskopaufnahme einer Probe aus Niob

Abbildung 5: Strukturen mit Armlänge von 0.12 mm

Die Metallschichten sind auf einem Silicium-Substrat angebracht, dessen optische Eigenschaften in separaten Messungen ohne Metallstrukturen bestimmt wurden.

3.2 Mathematische Modellierung

Um das Ansprechen der Ringe auf ein äußeres Feld beschreiben zu können wird zunächst angenommen, dass sie entweder elektrisch oder magnetisch angeregt werden. Die Probe wird als Zweischichtsystem beschrieben, wobei die erste Schicht das Substrat ist. Als zweite Schicht wird ein homogenes Material mit einer Dicke von 200 nm angenommen, für das je nach Anregung ein effektives ϵ oder ein effektives μ gesucht wird, das das System möglichst genau beschreibt. Es wird also entweder ϵ oder μ gleich 1 gehalten, während der jeweils andere Wert mit der Frequenz variiert. Im Fall einer elektrischen Anregung lässt sich ϵ beschreiben als

$$\epsilon = 1 + \chi \quad (3.2)$$

$$\chi = \frac{\Delta\epsilon\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (3.3)$$

wobei χ die elektrische Suszeptibilität, $\Delta\epsilon$ die Stärke der Resonanz, ω_0 die Resonanzfrequenz und γ die Resonanzbreite ist. Im Fall einer magnetischen Resonanz gilt:

$$\mu = 1 + \chi_m \quad (3.4)$$

$$\chi_m = \frac{\Delta\epsilon\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (3.5)$$

Es wurde der in 2.2 beschriebene Formalismus zur Beschreibung der Proben als Zweischichtsystem verwendet. Die optischen Eigenschaften des Substrates

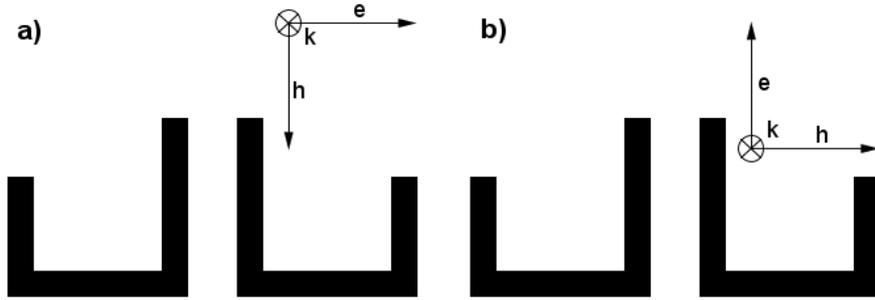


Abbildung 6: Ringe mit einfallenden Wellen unter Geometrie N (a) und Geometrie P (b)

wurden in einer separaten Messung bestimmt und sind frequenzunabhängig (experimentell bestimmter Wert: $n_{sub} = 11.4 + i 0.07$). Die Parameter $\Delta\epsilon$, ω_0 und γ wurden nun für Ausschnitte des gemessenen Spektrums numerisch so angenähert, dass die beobachteten Resonanzen optimal beschrieben werden. Zum Vergleich wurde in einem zweiten Schritt durch freie Wahl des effektiven Parameters (je nach Resonanz ϵ oder μ) für jeden Punkt des gemessenen Frequenzspektrums der Wert $T_{exp}e^{i\phi_{exp}} - T_{th}e^{i\phi_{th}}$ minimiert, wobei T_{exp} und ϕ_{exp} die experimentell gemessenen Werte bzw. $T_{th}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ und $\phi_{th}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ die Theoriewerte des Zweischichtsystems sind.

4 Messergebnisse und Interpretation

4.1 Gold

Es wurde zunächst die Transmission der Goldproben mit einer Armlänge von 0.12 mm in zwei verschiedenen Versuchsanordnungen gemessen: in *Geometrie N* steht das elektrische Feld der anregenden EM-Welle normal auf die kurzen Arme der Probe, in *Geometrie P* ist die Probe um 90° gedreht, das elektrische Feld steht also parallel zu den kurzen Armen, siehe auch Abb. 6.

Abb. 7 zeigt Messergebnisse (rot) und theoretische Fits mit $\mu = 1$ und $\epsilon = 1 + \chi$, siehe Abschnitt 3.2. Die hier gezeigten Resonanzen lassen sich mit variablen ϵ zufriedenstellend beschreiben. Die Gütefaktoren und Resonanzfrequenzen der hier erhaltenen theoretischen Fits sind in Tabelle 1 aufgeführt. Abb. 8 zeigt noch einmal die Messdaten in der Geometrie P, allerdings mit $\epsilon = 1$ und variablem μ . Wie man sieht, funktioniert diese Beschreibung nicht.

Abb. 10 zeigt für jede Frequenz - wie in Abschnitt 3.2 beschrieben - experimentell bestimmte ϵ (Punkte), sowie die im vorherigen Schritt über die Fits erhaltenen Werte des Real- und Imaginärteils von ϵ (Linien). Die dazu verwendeten Messwerte der Phasenverschiebung sind in Abb. 9 dargestellt. Wie man sieht, werden die Messwerte vom Fit nahezu perfekt beschrieben.

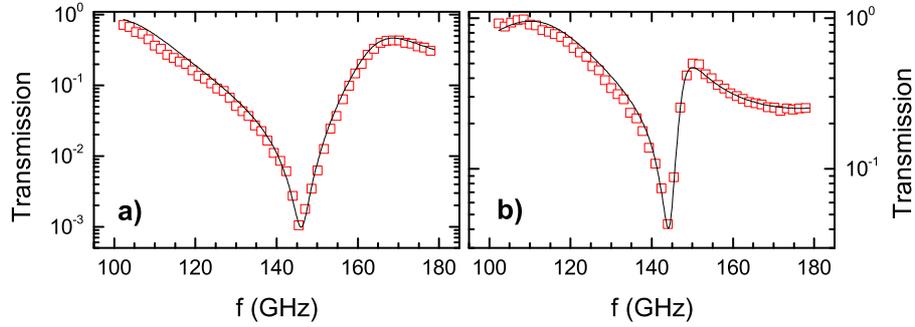


Abbildung 7: Transmissionsspektren für 0.12 mm-Goldprobe (Symbole) bei $T = 295$ K mit Fits (Linien) für variables ϵ in Geometrie N (a) und Geometrie P (b)

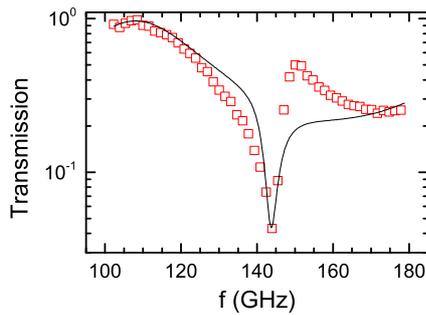


Abbildung 8: Transmissionsspektrum für 0.12 mm-Goldprobe (Symbole) bei $T = 295$ K in Geometrie P mit Fit (Linie) für variables μ

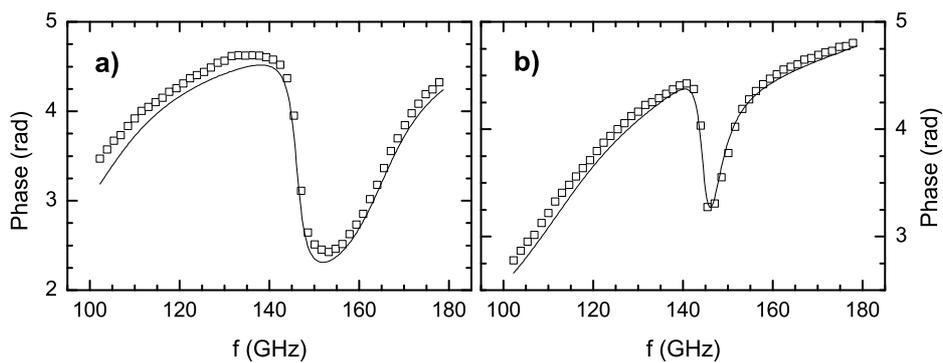


Abbildung 9: Gemessene Phasenverschiebung ϕ für 0.12 mm-Goldprobe (Symbole) mit Fits (Linien, Fitparameter aus Transmission) bei $T = 295$ K in Geometrie N (a) und Geometrie P (b)

Tabelle 1: Fitparameter der 0.12 mm-Goldprobe in verschiedenen Geometrien

Geometrie	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
N	43 ± 10	146.1 ± 0.6	2.72 ± 0.29	3.4 ± 0.8
P	49 ± 13	144.4 ± 0.5	0.35 ± 0.07	3.0 ± 0.8

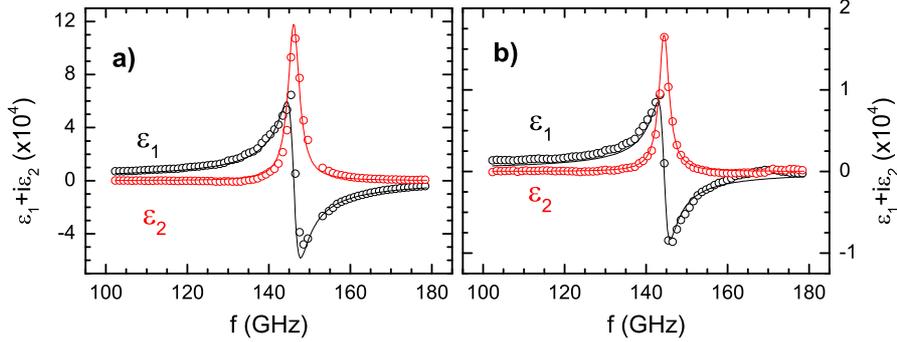


Abbildung 10: Permittivität $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ für 0.12 mm-Goldprobe (Punkte) bei $T = 295$ K in Geometrie N (a) und Geometrie P (b); die Linien entsprechen den theoretischen Fits ohne Einbeziehen der Phasenmessung

Die Beschreibung der Resonanzen mit variablem ϵ liefert sinnvolle Ergebnisse, das Modell scheint also das Verhalten der Strukturen hinreichend zu beschreiben.

Für die Goldprobe mit einer Armlänge von 0.15 mm ergeben sich bei Geometrie N ähnlich gute Ergebnisse wie zuvor, in Geometrie P weichen die gemessenen Werte allerdings bei Variation von ϵ wesentlich mehr als zuvor vom theoretischen Modell ab (siehe Abb. 11). Variation von μ ergibt wie schon bei der ersten Goldprobe noch wesentlich geringere Übereinstimmung, wie in Abb. 12 noch einmal gezeigt wird. Die Gütefaktoren und Resonanzfrequenzen des Fits mit ϵ sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Abb. 13 zeigt wiederum die gemessenen Werte der Phasenverschiebung, Abb. 14 zeigt die damit errechneten Werte für ϵ . Es ergibt sich in Geometrie P eine wesentlich stärkere Abweichung als bei der ersten Probe, die gemes-

Tabelle 2: Fitparameter der 0.15 mm-Goldprobe in verschiedenen Geometrien

Geometrie	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
N	26 ± 6	138.6 ± 0.7	3.25 ± 0.25	5.3 ± 1.3
P	33 ± 9	135.9 ± 0.5	0.12 ± 0.01	4.1 ± 1.1

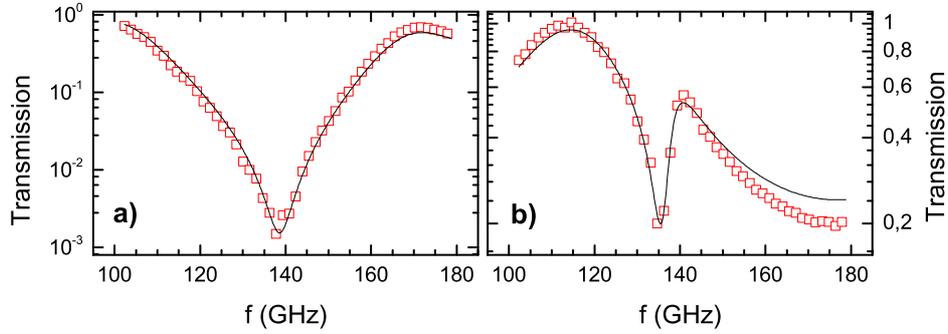


Abbildung 11: Transmissionsspektren für 0.15 mm-Goldprobe (Symbole) bei $T = 295$ K mit Fits (Linien) für variables ϵ in Geometrie N (a) und Geometrie P (b)

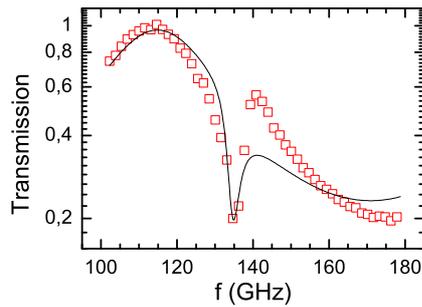


Abbildung 12: Transmissionsspektrum für 0.15 mm-Goldprobe (Symbole) bei $T = 295$ K in Geometrie P mit Fit (Linie) für variables μ

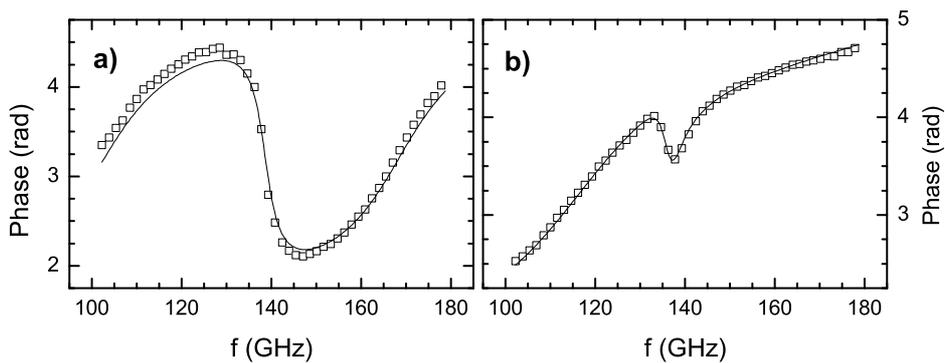


Abbildung 13: Gemessene Phasenverschiebung ϕ für 0.15 mm-Goldprobe (Symbole) mit Fits (Linien, Fitparameter aus Transmission) bei $T = 295$ K in Geometrie N (a) und Geometrie P (b)

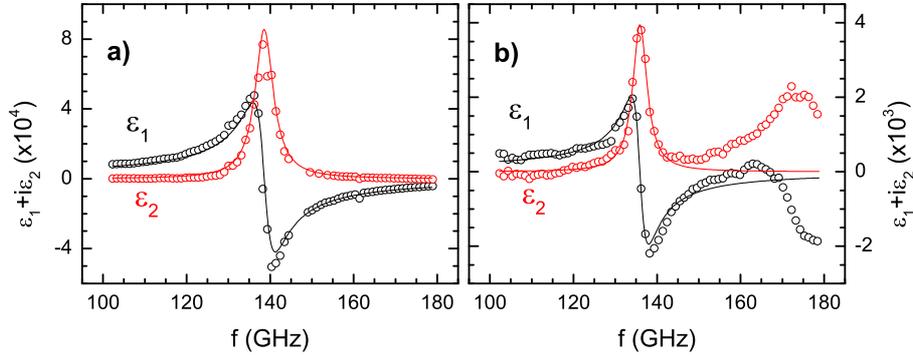


Abbildung 14: Permittivität $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ für 0.15 mm-Goldprobe (Punkte) bei $T = 295$ K in Geometrie N (a) und Geometrie P (b); die Linien entsprechen den theoretischen Fits ohne Einbeziehen der Phasenmessung

senen Werte weichen außerhalb der Resonanz stark vom Modell ab, was zu erwarten war, da schon der Fit in diesem Bereich nicht mit den Messwerten übereinstimmt. Vor allem die starke Abweichung bei hohen Frequenzen kann nicht annähernd richtig sein, sondern ist auf eine starke Diskrepanz zwischen theoretischem Fit und Messwerten zurückzuführen.

4.2 Niob

Die Niob-Proben wurden unter anderem im supraleitenden Zustand gemessen, um ohm'sche Verluste auszuschalten und damit die Kopplung der Resonatoren an das elektrische Wechselfeld zu verbessern, was zu höheren Gütefaktoren führen sollte. Um die Abhängigkeit der Resonanzen von der Leitfähigkeit zu prüfen, wurde einerseits die Temperatur variiert, andererseits bei einigen Messungen ein äußeres Magnetfeld parallel zur Probenebene angelegt. Durch Messung bei verschiedenen Magnetfeldstärken in der Nähe des kritischen Feldes bzw. bei Temperaturen nahe der Sprungtemperatur (ca. 9.5 K) wurde so bei verschiedenen Leitfähigkeiten gemessen und wie zuvor durch variieren von ϵ eine sinnvolle Beschreibung des Ansprechverhaltens gesucht.

Abb. 15 zeigt die gemessenen Transmissionsspektren der 0.12 mm Niobprobe in Geometrie N, einerseits bei 5.4 K und verschiedenen starken äußeren Magnetfeldern, andererseits ohne Magnetfeld bei verschiedenen Temperaturen. Wie man sieht, nimmt die Stärke der Resonanz mit größerer Magnetfeldstärke bzw. höherer Temperatur ab, die Resonanz wird breiter und die Resonanzfrequenz verschiebt sich aufgrund des geänderten Stromflusses im Niob, wie gemäß [5] erwartet. Die Fitparameter in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke sind in Tabelle 3 aufgeführt bzw. in Abb. 16 graphisch dargestellt,

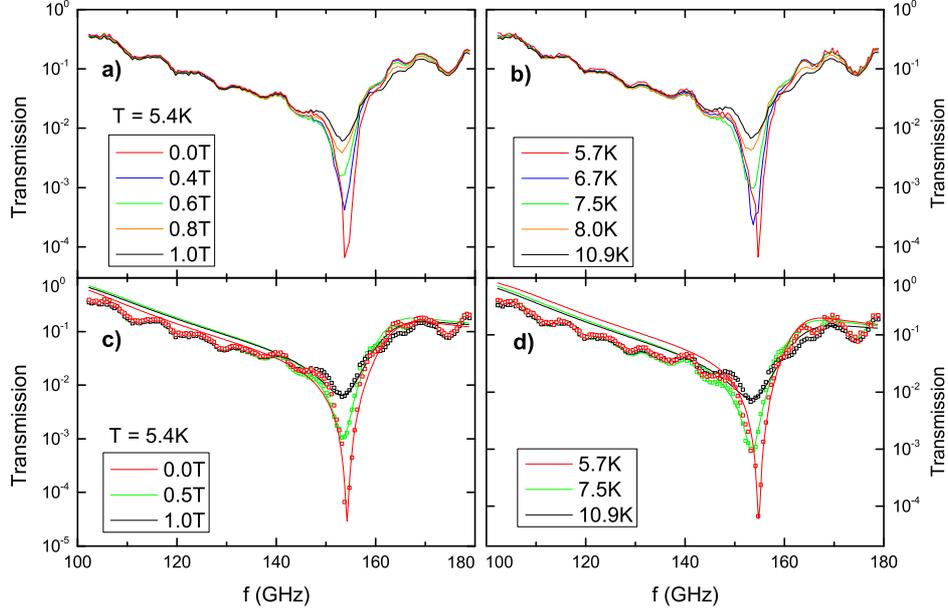


Abbildung 15: Gemessene Transmissionsspektren der 0.12 mm-Niobprobe in Geometrie N in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke ($T = 5.4$ K) (a) bzw. der Temperatur (b) sowie Fits an drei der gemessenen Spektren (c,d; Symbole: gemessene Werte, Linien: Fits)

Tabelle 3: Fitparameter der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke (Geometrie N, $T = 5.4$ K)

H (T)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
0.0	320 ± 64	154.2 ± 0.3	3.5 ± 0.5	0.5 ± 0.1
0.2	158 ± 32	154.5 ± 0.4	3.1 ± 0.6	1.0 ± 0.2
0.4	101 ± 20	153.7 ± 0.4	2.8 ± 0.3	1.5 ± 0.3
0.5	61 ± 12	153.6 ± 0.7	2.9 ± 0.3	2.5 ± 0.5
0.6	50 ± 11	153.4 ± 0.8	2.8 ± 0.4	3.1 ± 0.7
0.7	36 ± 10	153.3 ± 1.4	2.8 ± 0.5	4.2 ± 1.2
0.8	30 ± 8	153.4 ± 1.6	2.8 ± 0.6	5.1 ± 1.3
0.9	25 ± 7	153.7 ± 1.9	2.8 ± 0.6	6.1 ± 1.6
1.0	22 ± 6	153.8 ± 2.3	2.9 ± 0.7	6.9 ± 1.9

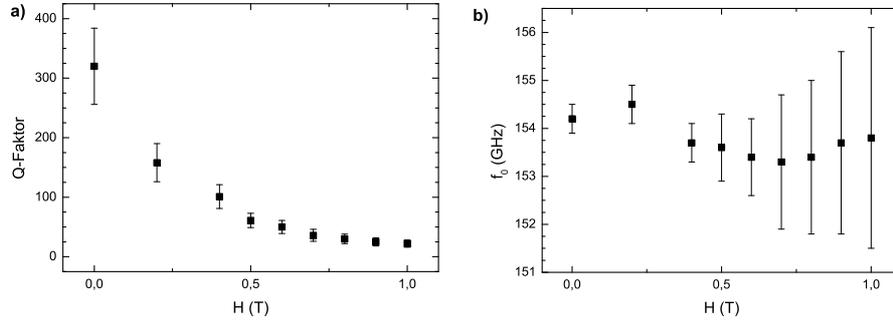


Abbildung 16: Q-Faktoren (a) und Resonanzfrequenzen (b) der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke (Geometrie N, $T = 5.4$ K)

Tabelle 4: Fitparameter der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie N)

T (K)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
5.7	320 ± 128	154.8 ± 0.3	2.5 ± 0.4	0.5 ± 0.2
6.0	277 ± 46	154.5 ± 0.2	2.8 ± 0.6	0.6 ± 0.1
6.7	128 ± 21	153.9 ± 0.4	3.0 ± 0.5	1.2 ± 0.2
7.5	66 ± 9	153.5 ± 0.4	2.8 ± 0.3	2.3 ± 0.3
8.0	29 ± 6	153.4 ± 0.5	2.8 ± 0.6	5.4 ± 1.2
8.5	21 ± 4	154.2 ± 0.8	2.9 ± 0.5	7.2 ± 1.4
10.9	20 ± 4	154.2 ± 0.9	3.0 ± 0.6	7.7 ± 1.7

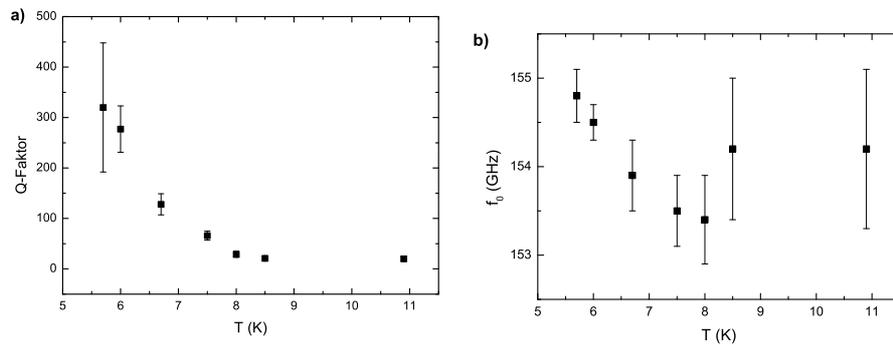


Abbildung 17: Q-Faktoren (a) und Resonanzfrequenzen (b) der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie N)

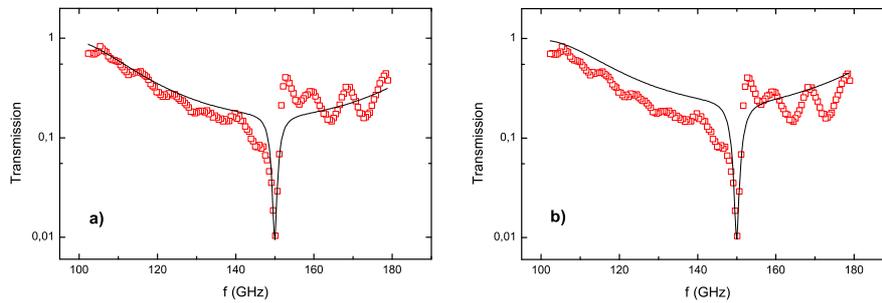


Abbildung 18: Gemessenes Transmissionsspektrum (Symbole) der 0.12 mm-Niobprobe in Geometrie P mit Fits (Linien) für variables ϵ (a) bzw. variables μ (b)

die Werte in Abhängigkeit der Temperatur finden sich in Tabelle 4 bzw. Abb. 17. Wie erwartet verhalten sich die Werte bei steigender Temperatur bzw. Magnetfeldstärke völlig äquivalent. Die Q-Faktoren nehmen mit sinkender Leitfähigkeit ab. Dass die Resonanzfrequenzen nicht stetig sinken, sondern bei höheren Frequenzen scheinbar wieder steigen, könnte darauf zurückzuführen sein, dass bei immer unschärfer werdenden Resonanzen auch die Fits an Qualität verlieren und die Resonanzfrequenz damit nicht mehr klar bestimmbar ist.

Für die Geometrie P wurde, um festzustellen, ob die Resonanzen elektrisch oder magnetisch sind, wiederum versucht, ein Spektrum einmal mit variablem ϵ und einmal mit variablem μ zu beschreiben. Die Ergebnisse sind in Abb. 18 dargestellt. Wie man sieht, kann die Resonanz mit beiden Ansätzen beschrieben werden, außerhalb der Resonanz ergibt sich aber für variables μ eine wesentlich stärkere Abweichung. Es kann daher - vor allem in Hinblick auf das Verhalten der Gold-Proben - angenommen werden, dass es sich auch hier um eine elektrische Resonanz handelt.

Wie schon in Geometrie N wurden bei variierender Temperatur bzw. Magnetfeldstärke jeweils einige Transmissionsspektren in Geometrie P aufgenommen, von denen die wichtigsten in Abb. 19 dargestellt sind. Alle Parameter der theoretischen Fits finden sich wiederum in den Tabellen 5 und 6 bzw. graphisch in Abb. 20 und Abb. 21.

Die magnetfeldabhängigen und die temperaturabhängigen Spektren sind wiederum annähernd äquivalent, die Gütefaktoren und Resonanzfrequenzen verhalten sich wie erwartet. Im Vergleich zu den Spektren in Geometrie N fällt allerdings auf, dass die Resonanzen in Geometrie P auch bei tiefen Temperaturen und ohne äußeres Magnetfeld wesentlich weniger scharf sind, das heißt geringere Gütefaktoren aufweisen.

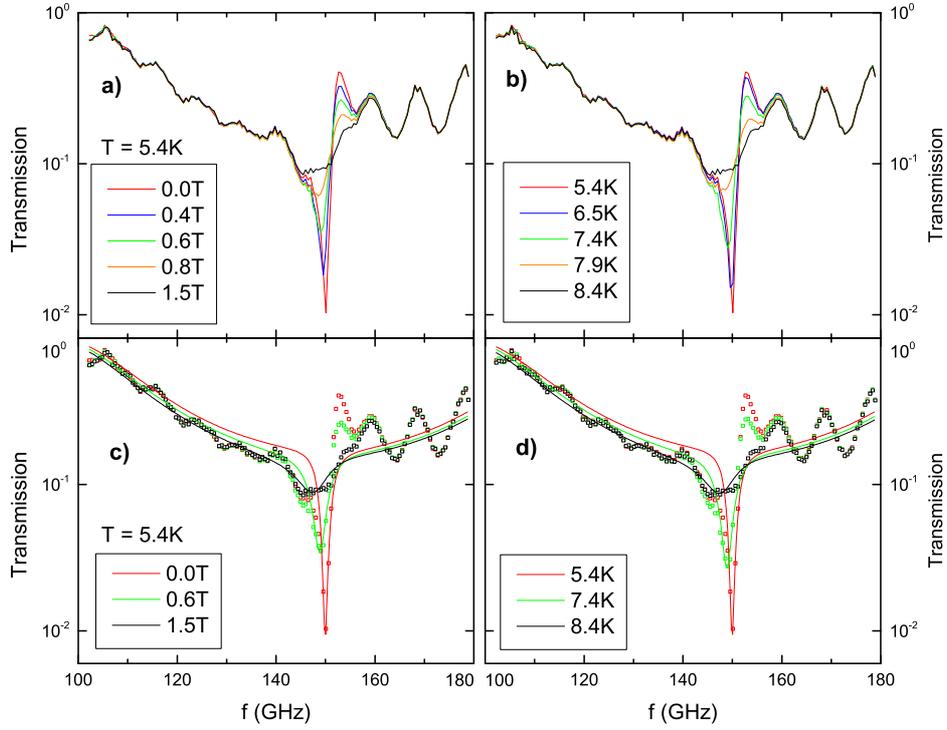


Abbildung 19: Gemessene Transmissionsspektren der 0.12 mm-Niobprobe in Geometrie P in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke ($T = 5.2$ K) (a) bzw. der Temperatur (b) sowie Fits an drei der gemessenen Spektren (c,d; Symbole: gemessene Werte, Linien: Fits)

Tabelle 5: Fitparameter der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke (Geometrie P, $T = 5.2$ K)

H (T)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
0.0	196 ± 49	149.9 ± 0.2	0.50 ± 0.04	0.8 ± 0.2
0.1	197 ± 49	149.9 ± 0.2	0.49 ± 0.06	0.8 ± 0.2
0.2	169 ± 38	149.9 ± 0.2	0.51 ± 0.08	0.9 ± 0.2
0.3	122 ± 20	149.7 ± 0.3	0.57 ± 0.09	1.2 ± 0.2
0.4	111 ± 26	149.5 ± 0.4	0.57 ± 0.07	1.3 ± 0.3
0.5	77 ± 16	149.2 ± 0.4	0.62 ± 0.09	1.9 ± 0.4
0.6	63 ± 10	148.9 ± 0.6	0.62 ± 0.10	2.4 ± 0.4
0.7	45 ± 7	148.5 ± 0.7	0.65 ± 0.11	3.3 ± 0.5
0.8	34 ± 5	148.2 ± 0.8	0.68 ± 0.13	4.4 ± 0.7
0.9	28 ± 4	147.9 ± 1.1	0.69 ± 0.14	5.2 ± 0.8
1.0	25 ± 4	147.8 ± 1.1	0.69 ± 0.13	5.8 ± 0.9
1.5	22 ± 3	147.8 ± 1.7	0.70 ± 0.15	6.8 ± 0.9

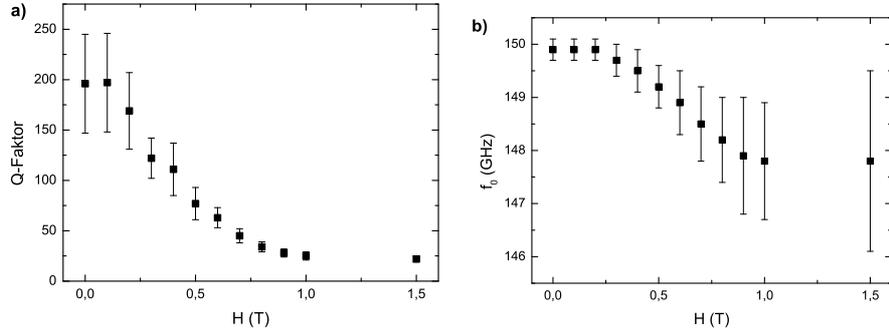


Abbildung 20: Q-Faktoren (a) und Resonanzfrequenzen (b) der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke (Geometrie P, $T = 5.2$ K)

Tabelle 6: Fitparameter der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie P)

T (K)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
5.4	196 ± 49	149.9 ± 0.2	0.50 ± 0.04	0.8 ± 0.2
5.8	187 ± 47	149.9 ± 0.2	0.50 ± 0.06	0.8 ± 0.2
6.5	135 ± 24	149.7 ± 0.3	0.56 ± 0.08	1.1 ± 0.2
7.0	125 ± 31	149.5 ± 0.3	0.56 ± 0.11	1.2 ± 0.3
7.4	75 ± 15	148.9 ± 0.4	0.63 ± 0.14	2.0 ± 0.4
7.9	30 ± 6	147.9 ± 1.2	0.71 ± 0.18	4.9 ± 0.9
8.4	21 ± 3	147.8 ± 1.5	0.72 ± 0.17	6.9 ± 1.0

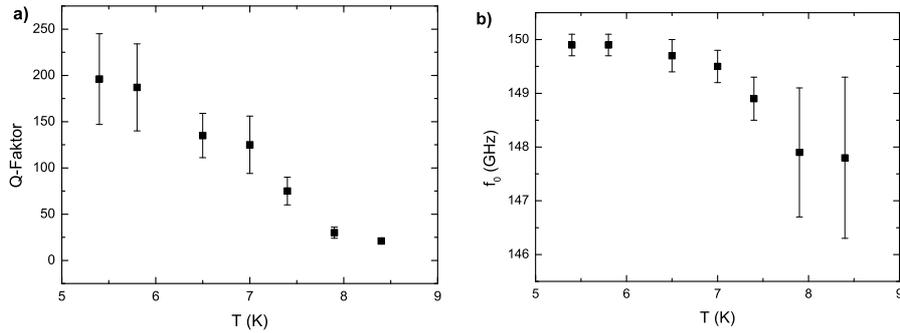


Abbildung 21: Q-Faktoren (a) und Resonanzfrequenzen (b) der 0.12 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie P)

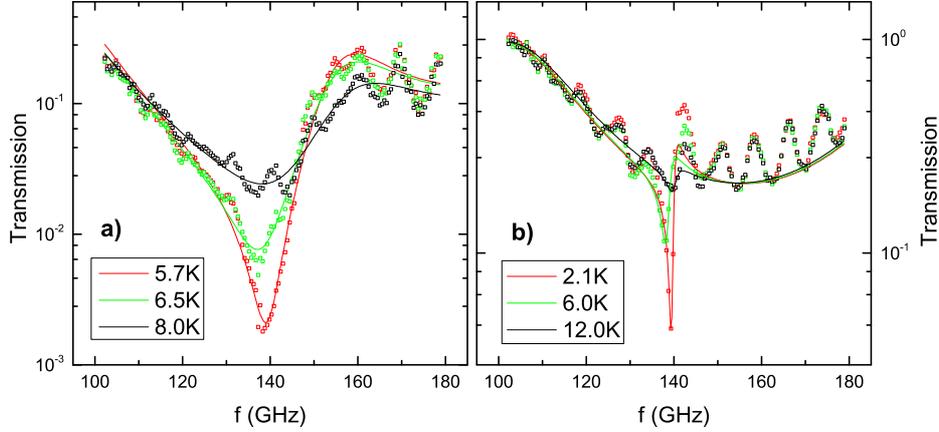


Abbildung 22: Gemessene Transmissionsspektren (Symbole) der 0.15 mm-Niobprobe in Geometrie N (a) und Geometrie P (b) in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke ($T = 5.4\text{ K}$) mit Fits (Linien) an die gemessenen Werte

Tabelle 7: Fitparameter der 0.15 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie N)

T (K)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
5.7	25 ± 4	139.3 ± 0.8	3.9 ± 0.5	5.5 ± 0.8
6.5	14 ± 2	138.1 ± 1.0	3.9 ± 0.5	10.1 ± 1.8
7.0	6 ± 1	139.1 ± 2.4	4.5 ± 0.5	22.6 ± 4.0
8.0	7 ± 2	142.1 ± 2.8	4.1 ± 0.5	21.6 ± 6.1

An der Niobprobe mit Armlänge 15 mm wurden die gleichen Versuche durchgeführt. Da die Resultate bei variabler Temperatur sich nicht wesentlich von denen bei variablem Magnetfeld unterscheiden, werden hier nur die temperaturabhängigen Werte gezeigt.

Wie zuvor wurde zunächst geprüft, ob sich die Spektren mit variablem μ oder mit variablem ϵ besser beschreiben lassen. Die Beschreibung mit ϵ lieferte wie auch schon bei den andere Proben eine wesentlich bessere Übereinstimmung, es wird daher davon ausgegangen, dass es sich um eine elektrische Resonanz handelt.

Abb. 22 zeigt die bei variabler Temperatur in Geometrie N und Geometrie P gemessenen Spektren und theoretische Fits. Die Parameter der Fits sind in den Tabellen 7 und 8 aufgeführt.

Wie man sieht, treten bei dieser Probe deutlich niedrigere Gütefaktoren auf

Tabelle 8: Fitparameter der 0.15 mm-Niobprobe in Abhängigkeit der Temperatur (Geometrie P)

T (K)	Q-Faktor	f_0 (GHz)	$\Delta\epsilon (\cdot 10^3)$	γ (GHz)
2.1	164 ± 15	139.5 ± 0.4	0.13 ± 0.01	0.9 ± 0.1
6.0	75 ± 8	138.4 ± 0.3	0.11 ± 0.01	1.9 ± 0.2
12.0	55 ± 22	140.0 ± 1.7	0.04 ± 0.01	2.5 ± 1.0

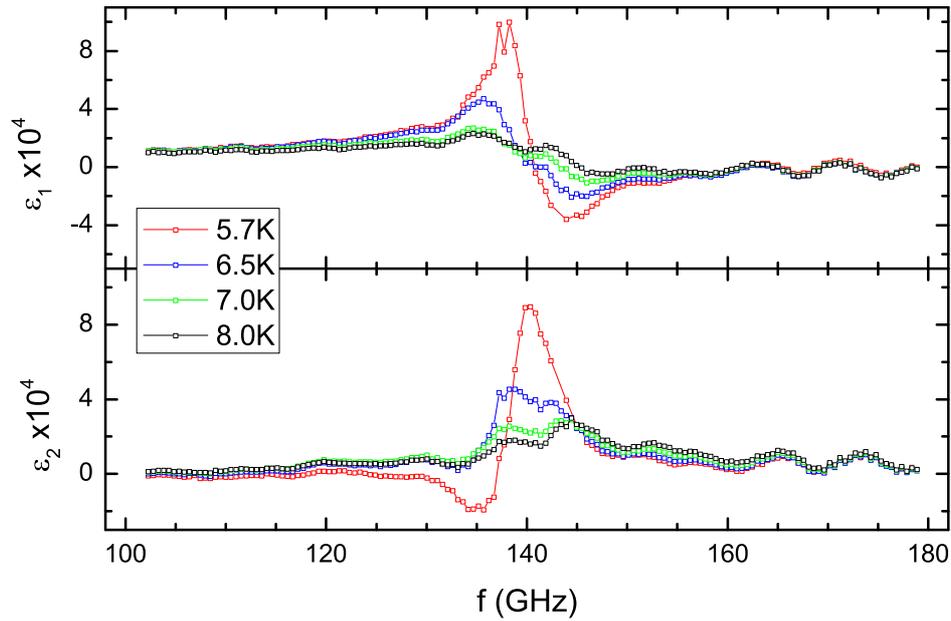


Abbildung 23: Permittivität $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ für 0.15 mm-Niobprobe in Geometrie N bei variabler Temperatur

als bei der mit 0.12 mm Armlänge. Auffällig ist auch, dass hier die Resonanz in Geometrie P sehr scharf ist, während in Geometrie N selbst bei tiefen Temperaturen keine hohen Gütefaktoren zu erreichen sind.

In einem weiteren Schritt wurden - wie in Abschnitt 3.2 beschrieben - für die einzelnen Frequenzpunkte unter Einbeziehung der Phasenmessung die Permittivitäten ϵ bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 23 dargestellt. Wie erwartet ergibt sich die Form eines Lorentzoszillators.

Auffällig ist hierbei der negative Bereich von ϵ_2 zwischen 130 und 140 GHz bei 5.7K. Dieser entspricht allerdings keinesfalls der Realität, sondern ist wahrscheinlich auf einen Fehler bei der Phasenmessung zurückzuführen.

4.3 Vergleich der Proben

Alle an den Niobproben gemessenen Gütefaktoren sind in Abb. 24 zum Vergleich noch einmal dargestellt.

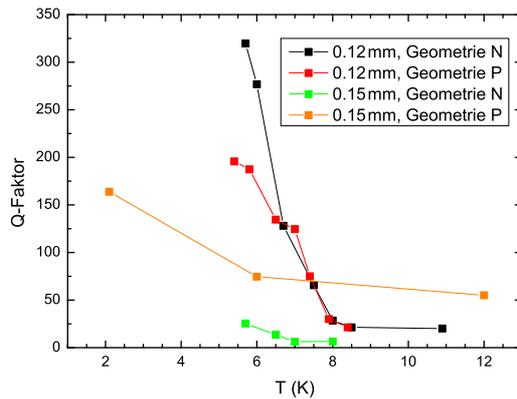


Abbildung 24: Gütefaktoren der Niobproben in Abhängigkeit der Temperatur

Wie schon weiter oben gezeigt, konnten mit den Niobproben in supraleitendem Zustand Gütefaktoren in der Größenordnung 200-300 erreicht werden, was etwa den Ergebnissen aus [2] entspricht und eine wesentliche Verbesserung gegenüber herkömmlichen Strukturen bedeutet.

Bei allen Proben treten wie erwartet bei größerer Asymmetrie, also geringerer Armlänge, auch höhere Gütefaktoren auf. Interessant sind die Unterschiede in Bezug auf die Geometrie: Bei den Goldproben ist jeweils die Resonanz in Geometrie P zumindest geringfügig schärfer, bei den Niobproben ist dies bei 0.15 mm Armlänge der Fall, bei 0.12 mm Armlänge ist aber eine deutlich schärfere Resonanz in Geometrie N zu beobachten. Warum die Kopplung des Resonators an das einfallende Wechselfeld in diesem Fall unter 90° Drehung besser funktioniert, ist auf einfache Art und Weise nicht erklärbar, eine nähere Untersuchung könnte aufschlussreich sein.

Die steigenden Werte für γ beim Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand entstehen durch einschalten der ohmschen Verluste. Durch Energieverlust der in den Leitern fließenden Ströme verbreitert sich auch die Resonanz.

Interessant ist auch das Verhalten der Resonanzfrequenz f_0 . Diese verändert sich beim Übergang in den normalleitenden Zustand nur geringfügig, bei 90° Drehung der Proben aber um ca. 2 GHz im Fall der Goldproben, bzw. sogar um 5 GHz im Fall der asymmetrischeren Niobprobe im supraleitenden Zustand. Dies ist auch in den Simulationen zu beobachten.

5 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war, die Resonanzen asymmetrischer SRRs zu beschreiben und insbesondere zu prüfen, ob die dabei auftretenden Gütefaktoren sich gegenüber den symmetrischen SRRs wesentlich vergrößern, das heißt ob schärfere Resonanzen auftreten. Durch Transmissions- und Phasenmessungen an asymmetrischen, supraleitenden Niobproben im Terahertzbereich konnten Gütefaktoren der Größenordnung 200-300 erreicht werden. Es wurde gezeigt, dass sich die Resonanzen beim Übergang in den normalleitenden Zustand, der durch höhere Temperaturen oder angelegte Magnetfelder erreicht werden kann, stark verbreitern, was niedrigere Gütefaktoren zur Folge hat.

Es konnte außerdem durch Messungen an Proben mit verschiedenen Armlängen bestätigt werden, dass höhere Gütefaktoren auftreten, je größer die Asymmetrie der Proben ist.

Interessant ist, dass die Proben nicht einheitlich auf Drehung um 90° reagieren. Bei den meisten Proben wurden unter Geometrie P (einfallendes elektrisches Wechselfeld parallel zu den Probenarmen) die schärfere Resonanz gemessen, bei den Niobproben mit 0.12 mm Armlänge waren allerdings die Resonanzen in Geometrie N (90° Drehung zu Geometrie P) bei niedrigen Temperaturen deutlich schärfer. Es wäre von Interesse, zu untersuchen, ob sich dieses Verhalten bei noch größerer Asymmetrie fortsetzt.

Literatur

- [1] V. Veselago et al., *Physics-Uspekhi* **10**, 509 (1968).
- [2] I. Al-Naib, C. Jansen, and M. Koch, *Applied Physics Letters* **94**, 153505 (2009).
- [3] M. Wunderlich, *Diplomarbeit induktiv gekoppelte spalt-ring-resonatoren*, Würzburg, 2010.
- [4] G. V. Kozlov and A. A. Volkov, Coherent source submillimeter wave spectroscopy, in *Millimeter and Submillimeter Wave Spectroscopy of Solids*, edited by G. Grüner, page 51, Springer, Berlin, 1998.
- [5] B. Jin et al., *Optics express* **18**, 17504 (2010).