

Technische Universität Wien  
Studiengang: Technische Physik

# Bachelorarbeit

zu dem Thema

## Transmission an einem Spalt zwischen zwei Zylindern

Sommersemester 2014

**Autorin:** Wagner Susanne

**Professor:** Andrei Pimenov  
**Betreuer:** Wlad Dziom

**Eingereicht am:** 24.9.2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Vergleichsmodell</b>	<b>3</b>
2.1	Analytische Lösung des Dielektrikums . . . . .	3
2.2	Simulation des Dielektrikums mit HFSS . . . . .	7
2.3	Numerische Lösung und Vergleich . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Zylindermodell</b>	<b>11</b>
3.1	Simulation des Zylindermodells . . . . .	11
3.2	Grenzen und Fehler der numerischen Methode mit HFSS . . . . .	15
3.3	Niedrige Frequenzen . . . . .	19
3.4	Experiment am Zylindermodell . . . . .	19
3.5	Vergleich Simulation und Experiment . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Weiterführende Ideen</b>	<b>28</b>

# 1 Einleitung

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit sollte die Transmission von elektromagnetischen Wellen an einem Spalt, der durch zwei nahe beieinanderstehende Zylindern gebildet wird, untersucht werden. Analytisch ist dieses Problem nicht lösbar. Daher mussten die elektrischen Felder numerisch berechnet werden. Zur numerischen Berechnung wurde das Ansoft Programm HFSS 12 (High Frequency Structure Simulator) verwendet. Dieses Programm verwendet die Finite Elemente Methode zur Berechnungen von elektromagnetischen Größen in einem Modell. Allerdings treten bei numerischen Methoden Fehler aus numerischen Schwankungen und anderen Gründen auf, welche die Genauigkeit der Lösung beeinträchtigen. Das weitere Ziel dieser Arbeit ist es, diese Fehler in der Lösung zu erkennen, sodass mehr Information über den tatsächlichen Verlauf der Kurve gewonnen werden kann.

Bevor das Zylindermodell behandelt wurde, ist das Programm an einem Vergleichsmodell mit bekannter analytischer Lösung erprobt worden. Durch das Bestimmen des Fehlers durch Vergleich der numerischen Lösung mit der analytischen Lösung sollten mögliche Fehler für das Problem der Zylinder besser einzuschätzen sein.

Nach Simulation des Zylindermodells wurde an einem realen Zylindermodell die Transmission experimentell gemessen und die Daten aus dem Experiment mit den numerischen Lösungen verglichen.

## 2 Vergleichsmodell

Um die Genauigkeit der numerischen Lösungen, die das Programm liefert zu untersuchen, wurde zunächst ein Vergleichsmodell angefertigt, welches auch analytisch lösbar ist.

Als Vergleichsmodell wurde ein Dielektrikum der Dicke  $d$ , mit einer relativen elektrischer Permittivität  $\epsilon_r$  gewählt. Im Simulationsexperiment sowie auf analytischem Weg wird die Transmission durch das Dielektrikum bestimmt und anschließend verglichen.

Da das Dielektrikum ein geometrisch viel einfacheres Problem darstellt und Symmetrieeigenschaften enthält, die im Zylindermodell nicht mehr vorhanden sind (Translationssymmetrie), werden im Zylindermodell noch zusätzlich Fehler auftreten. Mögliche Fehlerquellen werden in Abschnitt 3.2 behandelt.

### 2.1 Analytische Lösung des Dielektrikums

Im Rahmen der klassischen Elektrodynamik lässt sich die Transmission an einem Dielektrikum der Dicke  $d$  analytisch herleiten. Dazu macht man einen allgemeinen Ansatz für die Wellen im Vakuum und im Dielektrikum. Mit Hilfe der Randbedingungen an Grenzflächen lassen sich die Wellenfunktionen genau bestimmen und damit auch der Transmissionskoeffizient.

Der Transmissionskoeffizient  $T$  beschreibt das Verhältnis von transmittierter zu eingefallener Intensität. Eigentlich ist der Transmissionskoeffizient über das Verhältnis der Leistungen definiert. Da jedoch  $P = \int I(\vec{r})dA$ , das Flächenintegral über die ortsabhängige Intensität ist, und

zumindestens beim Modell des Dielektrikums die einfallende oder transmittierte Intensität keine Ortsabhängigkeit aufweist, kann berechtigterweise die Vereinfachung vorgenommen werden und nur das Intensitätsverhältnis betrachtet werden. Bei ortsabhängiger Intensität, wie beim Zylindermodell, muss die Integration jedoch durchgeführt werden.

### Maxwellgleichungen, Wellengleichung & Übergangsbedingungen

Gesucht sind das E-Feld und B-Feld für das Problem des Dielektrikums, welche die entsprechenden Randbedingungen und die Maxwellgleichungen erfüllen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Betrachtet man einen Raum ohne freie Ladungen ( $\rho_f = 0$  und  $\vec{j}_f = 0$ ) und wendet man den rot-Operator auf Gleichung (2) bzw. auf (4) an, erhält man mit den Beziehungen  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$  die Wellengleichung für das E- bzw. B-Feld.

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

Nun fehlen noch die Übergangsbedingungen vom Vakuum in die Materie. Für die zwei Bedingungen, die hier gebraucht werden, bildet man das Linienintegral über Gleichung (2) bzw. (4) entlang einer Kurve, die die Grenzfläche einschließt. Lässt man die zwei Breitseiten gegen Null gehen und wendet den Stokeschen Integralsatz an, erhält man folgende Bedingungen für das E- bzw. H-Feld:

$$E_{II}^{\parallel} - E_I^{\parallel} = 0 \quad (7)$$

$$H_{II}^{\parallel} - H_I^{\parallel} = \vec{j}_f \times \hat{n} \quad (8)$$

Im Raum ohne freie Ladungsströme ( $\vec{j}_f=0$ ), wird Gleichung (8) auch gleich Null. Mit diesen Bedingungen kann die Wellengleichung des E-Felds für das Problem des Dielektrikums gelöst werden.

## Ansatz

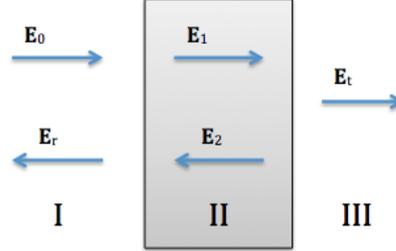


Abbildung 1: Skizze zum Lösungsansatz für die Berechnung der Transmission am Dielektrikum (II) in Vakuum (I+III). Mögliche Wellengänge des elektrischen Felds bei einfallender Welle  $E_0$  von links.

In Abbildung 1 erkennt man die möglichen Wellengänge in den Bereichen I, II und III. Hier sind Medium I und III Vakuum ( $\epsilon_r=1$ ) und Medium II das Dielektrikum ( $\epsilon_r$ ). Nun wählt man als Ansatz ebene Wellen:

$$I : \vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(k_V \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_r e^{i(-k_V \vec{r} - \omega t)} \quad (9)$$

$$II : \vec{E}_{II}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i(k_M \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_2 e^{i(-k_M \vec{r} - \omega t)} \quad (10)$$

$$III : \vec{E}_{III}(\vec{r}, t) = \vec{E}_t e^{i(k_V \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

Wobei  $k_M$  und  $k_V$  die Wellenvektoren in Materie bzw. Vakuum sind. Wählt man das Koordinatensystem mit  $\vec{e}_z \parallel \vec{k}$  und  $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ , so ergeben sich die x-Komponenten zu:

$$I : E_I(z, t) = E_0 e^{i(k_V z - \omega t)} + E_r e^{i(-k_V z - \omega t)} \quad (12)$$

$$II : E_{II}(z, t) = E_1 e^{i(k_M z - \omega t)} + E_2 e^{i(-k_M z - \omega t)} \quad (13)$$

$$III : E_{III}(z, t) = E_t e^{i(k_V z - \omega t)} \quad (14)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Wellengleichung (5) ein, so erhält man die Dispersionsrelation in Vakuum,  $k_V = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega$  und Materie,  $k_M = \sqrt{\mu \epsilon} \omega$ . Nun erkennt man den Zusammenhang zwischen den beiden Wellenvektoren:

$$k_M = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} k_V \quad (15)$$

## Übergangsbedingungen

Für die Übergänge von Medium I nach II und von II nach III muss die parallele E- und H-Feld Komponenten die Stetigkeitsbedingungen (7) und (8) erfüllen. Für das H-Feld ergibt sich aus (2) und (11) ebenfalls eine ebene Welle:  $\vec{H}(z, t) = \vec{H}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Das H- und E-Feld eingesetzt in die Maxwellgleichung (2) ergibt den Zusammenhang zwischen H- und E-Feld Amplitude:  $\frac{H}{E} = \pm \frac{k}{\mu\omega}$ . Das Vorzeichen ergibt sich für die verschiedenen Propagationsrichtungen. Die Ansätze in die Übergangsbedingungen eingesetzt ergeben Gleichung (16)-(19) für das E-Feld. Da die Bedingung zu allen Zeitpunkten gelten muss, kürzt sich der Faktor  $e^{i\omega t}$  einfach heraus.

$$E_I(z = 0, t) = E_{II}(z = 0, t) \Rightarrow E_0 + E_r = E_1 + E_2 \quad (16)$$

$$E_{II}(z = d, t) = E_{III}(z = d, t) \Rightarrow E_1 e^{ik_M d} + E_2 e^{-ik_M d} = E_t e^{ik_V d} \quad (17)$$

$$H_I(z = 0, t) = H_{II}(z = 0, t) \Rightarrow \frac{k_V}{\omega} E_0 - \frac{k_V}{\omega} E_r = \frac{k_M}{\omega \mu_r} E_1 - \frac{k_M}{\omega \mu_r} E_2 \quad (18)$$

$$H_{II}(z = d, t) = H_{III}(z = d, t) \Rightarrow \frac{k_M}{\omega \mu_r} E_1 e^{ik_M d} - \frac{k_M}{\omega \mu_r} E_2 e^{-ik_M d} = \frac{k_V}{\omega} E_t e^{ik_V d} \quad (19)$$

## Lösung

Das Gleichungssystem, bestehend aus Gleichung (16) - (19) gemeinsam mit dem Zusammenhang zwischen den Wellenvektoren (15) lässt sich mit Hilfe des Programms Mathematica lösen. Die Lösung beschreibt ein Dielektrikum mit der Dicke  $d=1\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 10$  und  $\mu_r = 1$ , da es sich um ein Material ohne magnetische Eigenschaften handelt. Als Lösung erhält man für die Transmission der Intensität T den analytischen Ausdruck in Formel (22). Die Transmission der E-Feld Amplitude in Gleichung (21) ergibt sich aus der Quadratwurzel von T.

$$T = \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} \quad (20)$$

$$t = \sqrt{T} = \frac{|E_t|}{|E_0|} \quad (21)$$

$$T = \frac{4e^{idk_M - idk_V} k_M k_V \mu_M \mu_V}{k_V^2 \mu_M^2 - e^{2idk_M} k_V^2 \mu_M^2 + 2k_M k_V \mu_M \mu_V + 2e^{2idk_M} k_M k_V \mu_M \mu_V + k_M^2 \mu_V^2 - e^{-2idk_M} k_M^2 \mu_V^2} \quad (22)$$

Diese Funktion ist eine periodische Funktion mit der Periode  $\Delta f = \frac{c}{2\epsilon_r d}$ . Kommt es zu konstruktiver Interferenz zwischen  $E_1$  und  $E_2$ , so ist die Transmission maximal. Da dies für jede Welle, dessen Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist gilt, war eine periodische Funktion schon von vornherein zu erwarten.

## 2.2 Simulation des Dielektrikums mit HFSS

Nun soll das selbe Problem, die Transmission an einem Dielektrikum mit der Dicke  $d=1\text{cm}$  und elektrischer Permeabilität  $\epsilon_r=10$  numerisch berechnet werden. Die Höhe des Modells wurde möglichst klein gewählt, um die Rechenzeit zu verkürzen. Für die Materialzuweisung wird der mittlere Block ausgewählt und ihm im *Properties Window* ein bereits bestehendes Material oder ein selbst definiertes Material zugewiesen. So wurden die Materialeigenschaften für das Dielektrikum auf  $\epsilon_r = 10$  und  $\mu_r = 1$  gesetzt.

Als nächstes muss eine anregende Welle eingefügt werden (Abbildung 2) und Randbedingungen an alle Modellaußenflächen zugewiesen werden. Die Wahl der Randbedingungen im Modell des Dielektrikums ist in Abbildung 3 dargestellt.

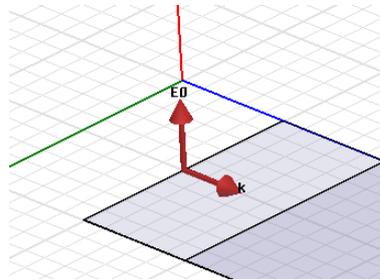


Abbildung 2: Polarisation der einfallenden ebenen Welle im Modell des Dielektrikums

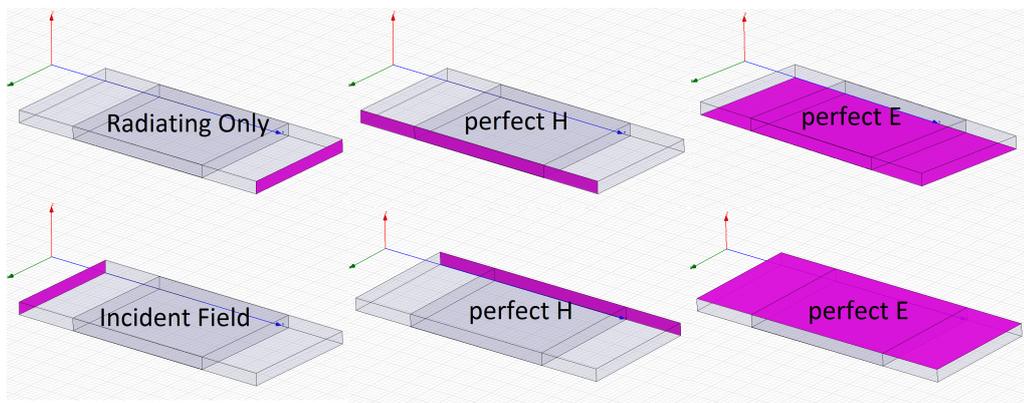


Abbildung 3: Randbedingungen für das Modell des Dielektrikums; nicht maßstabsgetreu

### Perfect H- oder Perfect E-Field Boundary

Die Perfect H- oder Perfect E-Field Boundary zwingt das H- bzw. E-Feld, senkrecht auf die Oberfläche zu stehen. In diesem Modell wurden sie dazu benutzt, eine ebene Welle im freien

Raum zu simulieren. Die Randbedingungen wurden der Polarisierung der einfallenden Welle entsprechend Vorder-, Rück-, Ober- und Unterseite des Modells zugewiesen.

### **Radiation Boundaries**

Mit diesen Randbedingungen kann man den freien Raum approximieren. Es gibt drei Arten von *Radiation Boundaries*: *Radiating Only*, *Incident Field* und *Enforced Field*. Für das Modell des Dielektrikums wurden die ersten beiden verwendet.

Bei der numerischen Berechnung an einer Fläche mit einer der *Radiating Only Boundary* wird die Reflexion für normal einfallende Wellenvektoren gleich Null gesetzt. Mit der Einschränkung auf normal einfallende Wellen simuliert diese Oberfläche dann auf perfekte Weise freien Raum, in den die Welle propagieren kann. Im nicht idealen Fall, also wenn eine Welle nicht normal auf die Fläche trifft, ist die Reflexion nicht mehr genau Null und die teilweise reflektierte Welle stört die Welle im Modell. Auf dieses Problem stößt man bei der Simulation der Zylinder. Weiters gilt für Radiation Boundaries, dass der Abstand zwischen Objekt und Fläche mit Randbedingung nicht kleiner als  $\frac{\lambda}{4}$  sein darf, damit die Berechnungen gute Lösungen liefern. Wobei  $\lambda$  die Wellenlänge der einfallenden Welle ist.

Bei der *Incident Wave* Randbedingung wird die punktförmige Anregung auf die gesamte Fläche projiziert. Zusätzlich wirkt diese Randbedingung genau wie die *Radiating Only* Randbedingung, sodass vom Objekt reflektierte Wellen ohne Reflektionen an der Modellaußenfläche in den freien Raum propagieren können.

Zuletzt müssen noch die Lösungs-Einstellungen bearbeitet werden. Im *Solution Setup* wird die Frequenz der Welle (60GHz) bestimmt. In der Box *Initial Mesh Options* setzt man Lambda Target auf 0.3, in der *Solution Options* Box die Ordnung der Basis Funktion auf *Second Order*. Der Wert für Lambda Target bestimmt, welchen Faktor der Wellenlänge, die Tetraeder im Netz als Seitenlängen bekommen sollen. [1]

Mit all diesen Einstellungen kann das Programm die Berechnung nun für mehrere Punkte mit Hilfe des Frequency-Sweeps (60-70GHz, Schrittweite 1 GHz) durchführen.

Die Auswertung der Berechnungen erfolgte an einem Punkt an der hinteren Kante des Modells. Man kann sich auf die Betrachtung der Intensität in einem Punkt beschränken, da die Intensität nicht ortsabhängig ist. Es wurde ein Field-Report des Quadrats der Komplexen Amplitude in diesem Punkt erstellt. Diese Werte sind proportional zu der transmittierten Intensität  $|E_t|^2$  aus Gleichung (20). Nun wird noch die einfallende Intensität ermittelt, indem der mittleren Box statt dem Dielektrikum Vakuum zugewiesen und die Intensität wieder in dem Punkt gemessen wird. Die Transmission ergibt sich dann durch Division der transmittierten und eingefallenen Intensität.

## **2.3 Numerische Lösung und Vergleich**

In Abbildung 4 sieht man das Tetraedernetz, in dem die Berechnungen durchgeführt wurden. Darunter befindet sich das E-Feld über das Modell geplottet. In diesem Plot erkennt man deutliche Ungenauigkeiten der numerischen Berechnung. Trotz des noch wenig dichten Netzes, stim-

men die Transmissionswerte sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Der direkte Vergleich von analytischer und numerischer Lösung ist in Abbildung 5 gezeigt. In Abbildung 6 ist der Quotient aus numerischer und analytischer Lösung geplottet. Man erkennt, dass die numerische Lösung nur etwa 0,07% von der analytischen Lösung abweicht.

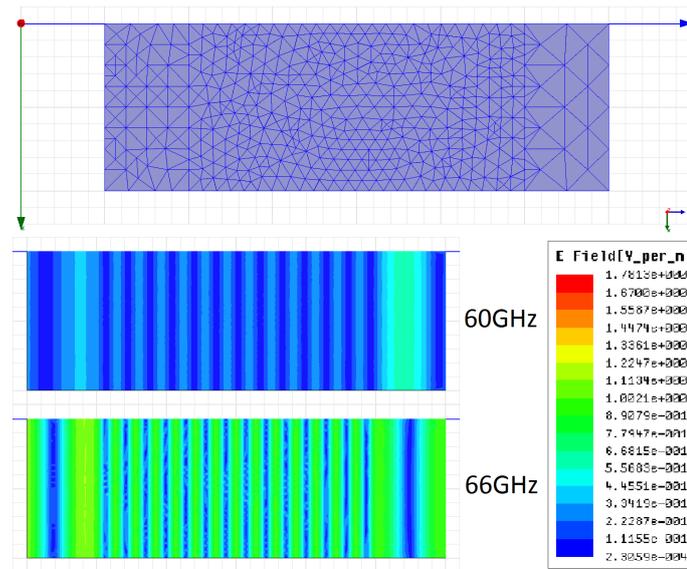


Abbildung 4: (a) Das Netz zur Simulation und (b) die Field-Plots für zwei Messpunkte

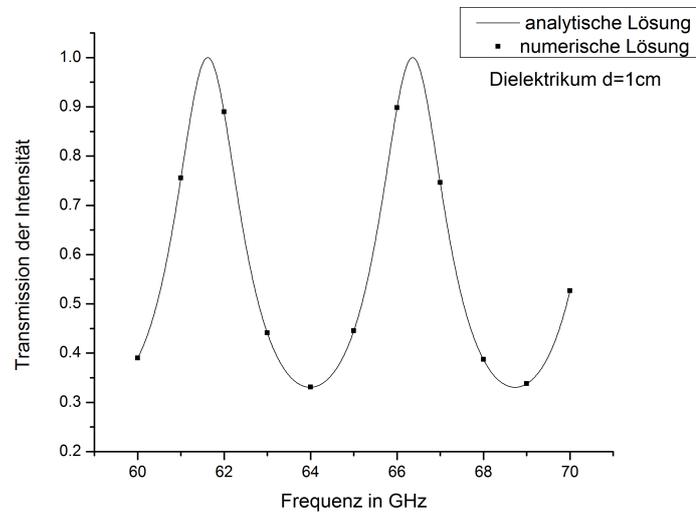


Abbildung 5: Vergleich der analytischen und numerischen Lösung für die Transmission am Dielektrikum

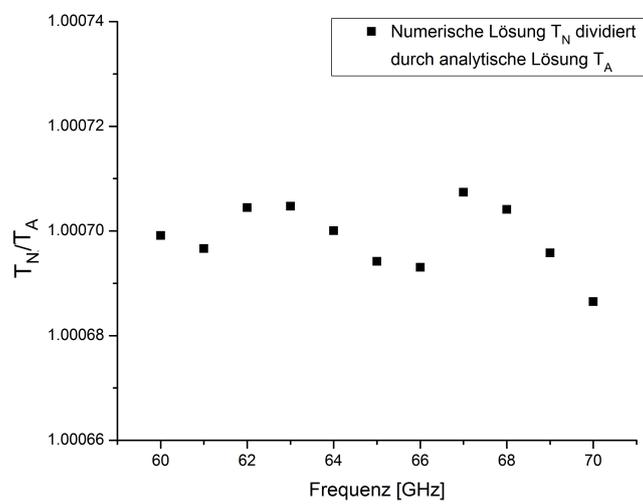


Abbildung 6: Die relative Abweichung der Simulation von der analytischen Lösung

### 3 Zylindermodell

Nun soll das Modell der Zylinder in HFSS modelliert und berechnet werden. Nach der Simulation wurde noch ein Experiment gemacht und die Werte von Simulations- und realem Experiment verglichen.

#### 3.1 Simulation des Zylindermodells

Das Zylindermodell besteht aus einer 1,5cm langen Box und zwei Zylindern mit Durchmessern von 1cm. Die Höhe mit 0,01cm ist sehr niedrig gewählt worden. Der Spalt zwischen den Zylindern beträgt  $\frac{1}{100}$  des Durchmessers, also 0,01cm. Die Wahl der Randbedingungen ist in Abbildung 7 zu sehen. Den Zylindern wurden mit der *Perfect E-Field* Randbedingung, die bewirkt, dass das elektrische Feld nur senkrecht auf deren Oberfläche stehen darf, ihre metallische Eigenschaft zugefügt. Die Polarisation der elektromagnetischen Welle ist in Abbildung 8 gezeigt. Die Polarisation des E-Feldes muss in x-Richtung gewählt werden. Ein E-Feld mit Polarisation in y-Richtung würde im Spalt parallel zur Zylinderoberfläche stehen. Weil hier parallele E-Felder wegen der gewählten Randbedingung an der Zylinderoberfläche in der Simulation aber Null gesetzt werden, wäre die Transmission mit dieser Polarisation verschwindend klein.

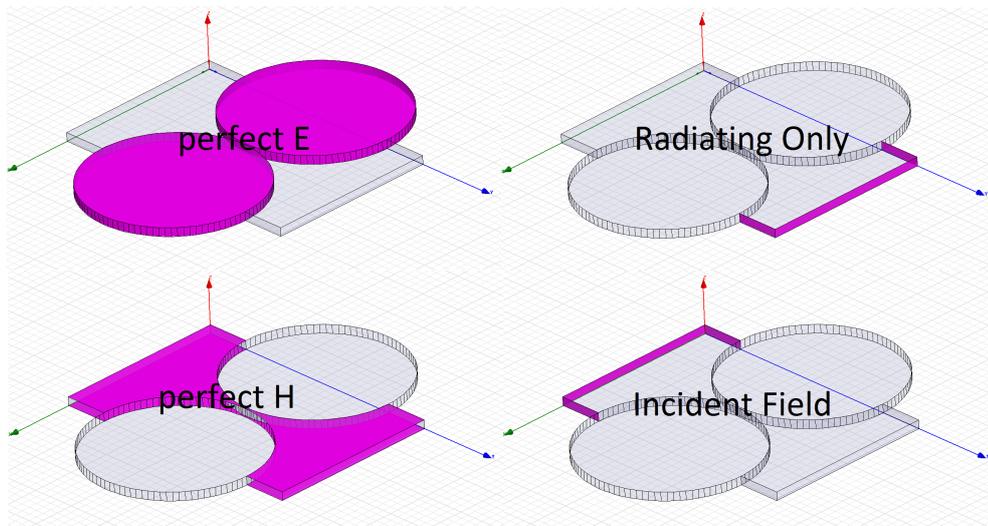


Abbildung 7: Randbedingungen für das Modell der Zylinder; nicht maßstabsgetreu

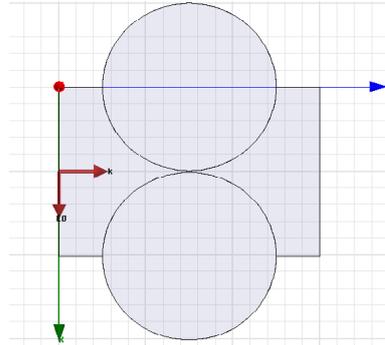


Abbildung 8: Polarisation der einfallenden Welle im Zylindermodell

Für die Berechnungen wurden folgende Einstellungen im Solution Setup vorgenommen:

**Maximum Number of Passes = 6**

Dies gibt die maximale Anzahl von Durchgängen an, die berechnet werden sollen. In jedem Durchgang wird das Netz verfeinert und am Ende die Konvergenzkriterien überprüft. Wird ein Konvergenzkriterium schon vor Erreichen des letzten Durchgangs erreicht, brechen die Berechnungen ab. Im Fall des Zylindermodells, waren 2 Durchgänge bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums nötig.

Wird die Konvergenz bis zum letzten Durchgang nicht erreicht, bricht die Berechnung trotzdem ab.

**Maximum Delta Energy = 0,1**

Dieses ist das Konvergenzkriterium für die Berechnungen. Die Berechnungen brechen ab, sobald die relative Energiedifferenz von einem Durchgang zum nächsten 10% unterschritten hat.

**Lambda Target = 0,3**

Das Ziel des *Lambda Refinements* ist es, die Seitenlänge der Tetraeder bis auf 30% der Wellenlänge zu bringen.

**Order of Basis Function = Second Order**

Die angesetzte Basisfunktion ist eine Funktion zweiter Ordnung.

**Maximum surface deviation = 0,1cm**

Die Einstellung der 'Maximum Surface Deviation' betrifft gekrümmte Oberflächen. Bei der Einteilung des Modells in die Finiten Elemente (Tetraeder) wird an gekrümmten Oberflächen ein Fehler begangen. Um die runden Seitenflächen der Zylinder besser durch die Tetraeder zu approximieren, kann man für die Surface Deviation, die Abweichung der Tetraeder von der echten Oberfläche einen Maximalwert angeben. Diese Einstellung findet unter dem Menüpunkt HFFS⇒Mesh Operations⇒Initial Mesh Settings statt. [2]

In Abbildung 9 kann das resultierende Netz des Zylindermodells mit dem Netz des Dielektrikummodells verglichen werden.

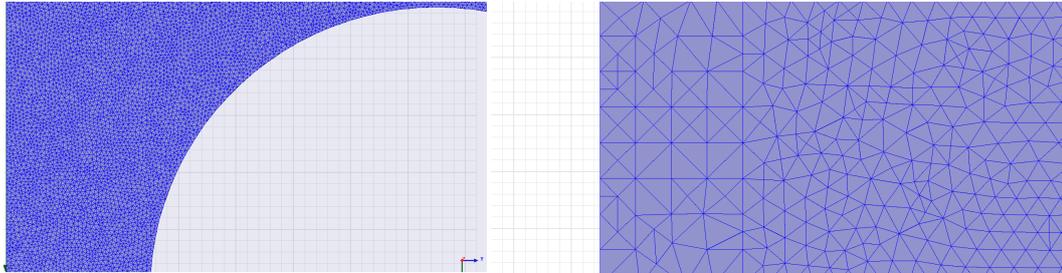


Abbildung 9: Vergleich der Netzichte bei den Zylindern (a) und beim Dielektrikum (b) jeweils in einem Ausschnitt von 0,75x0,5cm

Es wurden die Felder für Frequenzpunkte zwischen 40GHz und 480GHz mit einer Schrittweite von 10GHz berechnet. Die Auswertung der Daten erfolgte ähnlich wie beim Modell des Dielektrikums, nun aber durch Messung der Leistung. Für die Leistung wurden die Werte für die Intensität in jedem Punkt entlang der hinteren Modellkante aufintegriert, da die Verteilung der Intensität entlang der Kante nun nicht mehr homogen ist. Nach Division durch die eingefallene Leistung erhält man die Transmissionen für die einzelnen Frequenzen. In Abbildung 10 sind die E-Felder für verschiedene Frequenzen geplottet. Abbildung 11 zeigt die Transmission für die einzelnen Frequenzen. Für den Grenzwert der linearen Optik (wenn  $\lambda < \text{Spaltbreite}$ ) wird erwartet, dass sich die Transmission konstant einstellt. Wann diese Konstante erreicht wird, kann in dem Simulationsexperiment nur schlecht überprüft werden, da bei sehr hohen Frequenzen die Rechenzeit sehr lang wird. Um die Rechenzeit zu verkürzen müsste man bei der Genauigkeit einbüßen und die Netzichte verringern. Im niedrigfrequenten Bereich ist eine Simulation auch nicht mehr möglich, da hier bald der Grenzwert für die Gültigkeit der Radiation Boundaries erreicht wird. Denn für das gute Funktionieren der Radiation Boundary muss diese mindestens  $\frac{\lambda}{4}$  vom Objekt entfernt sein. Daher müsste man die Hinterseite des Modells noch weiter nach hinten setzen, wodurch sich der Rechenaufwand und die Rechenzeit wieder vervielfachen.

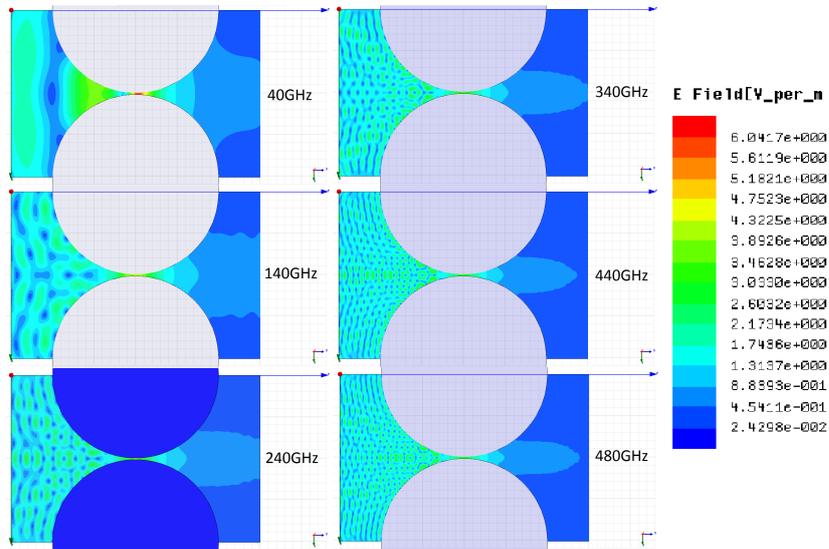


Abbildung 10: E-Feld Plot für verschiedene Frequenzen mit linearer Skala

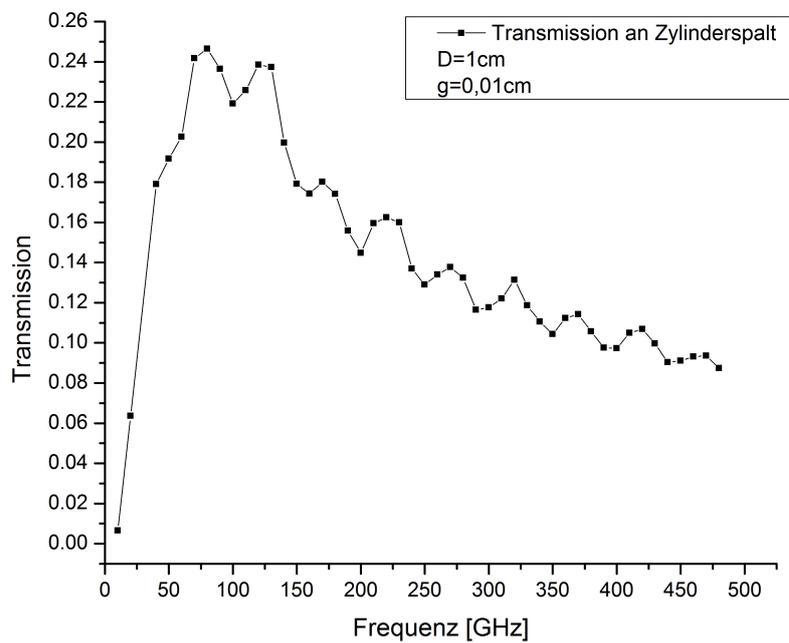


Abbildung 11: Transmission aus der Simulation am Zylindermodell

### 3.2 Grenzen und Fehler der numerischen Methode mit HFSS

Die Lösung aus dem vorigen Abschnitt ist natürlich fehlerbehaftet. Das Problem ist jedoch, dass diese Fehler schwer erkennbar und berechenbar sind, sodass keine genaueren Informationen über die reale Transmission erhalten werden können. Es sollen die Fehler nun qualitativ beschrieben und diskutiert werden.

Ein Fehlerbeitrag stammt aus der endlichen Netzdichte der Finiten Elemente Methode. Beim Modell des Dielektrikums war dieser Fehler selbst für geringe Netzdichten verschwindend. Die Zylinder stellen zwar eine kompliziertere Geometrie dar, aber trotzdem kann angenommen werden, dass dieser Fehler auch hier sehr klein bleibt.

Ein weiterer Fehlerbeitrag stammt aus der Ungenauigkeit der *Radiation Boundary*, welche in Abschnitt 2.2 beschrieben wurde. Die Oberfläche mit der Radiation Boundary ist nur dann exakt reflexionsfrei, wenn der Wellenvektor senkrecht auf die Fläche trifft. Die durch den Spalt gebeugte Wellenfront sowie die von den Zylindern reflektierten Wellen erfüllt diese Bedingung jedoch nicht mehr. Es treten also Reflexionen an den Modellbegrenzungen auf, welche die Lösung stören.

Um die Auswirkung dieses Effekts sichtbar zu machen, wurde eine Simulation an einem Einfachspalt durchgeführt. Zuerst wurde das Modell mit einer ebenen Fläche begrenzt und zum Vergleich einmal mit einer zylinderförmigen Fläche. Die qualitativen Unterschiede kann man in Abbildung 12 sehen. Man sieht, dass die Lösung des Modells mit zylindrischer Endfläche homogener und der analytischen Lösung näher ist als im zweiten Modell. Die Inhomogenitäten in der Wellenfront entstehen durch Interferenz der gebeugten Welle mit der an der Hinterwand reflektierten Welle.

Eine Möglichkeit, die Größenordnung dieses Fehlers im Zylindermodell zu beschreiben wäre, die Transmission im Modell des Einfachspalts, von dem die analytische Lösung bekannt ist, zu berechnen. Wenn alle anderen Fehler klein gehalten werden können, könnte durch den Vergleich von numerischer und analytischer Lösung im Modell des Einfachspalts auf den Fehlerbeitrag aus der *Radiation Boundary* geschlossen werden. Da das Beugungsmuster zwar ähnlich aber nicht gleich ist, kann so aber nur die Größenordnungen der Fehler im Zylindermodell bestimmt werden.

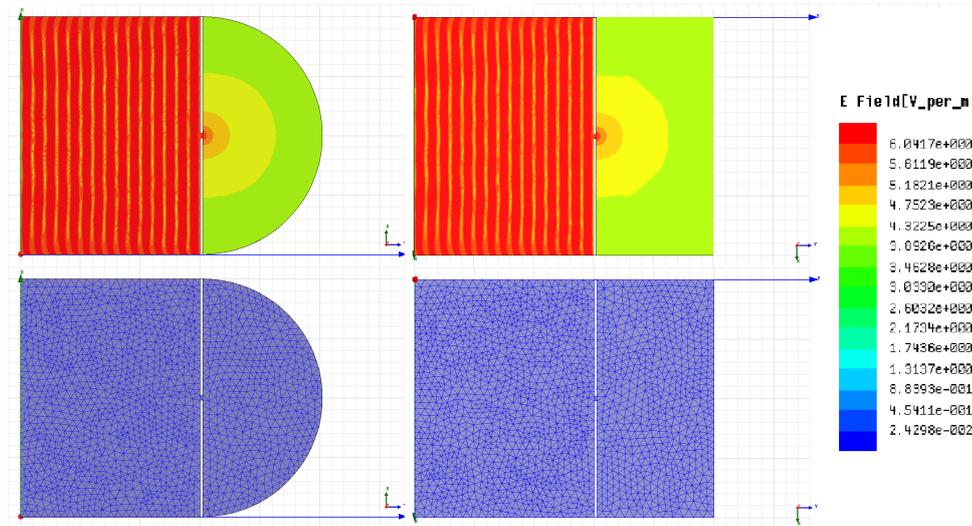


Abbildung 12: Vergleich der Lösung bei unterschiedlichen Anwendungen der *Radiating Only* Randbedingung

In den folgenden zwei Versuchen sollten die Auswirkungen der nicht perfekten Absorbteigenschaften von den Modellwänden mit den *Radiating Only* Randbedingungen näher untersucht werden.

Im ersten Versuch wurde das Modell symmetrisch um die Zylinder auf 2,5cm verlängert. In Abbildung 13 ist die Transmissionskurve für ein Zylindermodell von 2,5cm Länge dargestellt. Man erkennt einerseits, dass die Transmission niedriger ist, als für das kürzere Modell. Andererseits sieht man, dass sich die Periode der Oszillation verkürzt hat. Die Transmission ist insgesamt niedriger geworden, da über ein kleineres Winkelintervall gemessen worden ist, bzw. weil mehr transmittierte Intensität an den Seitenflächen verloren und nicht in die Messung eingeht.

Um die Herkunft der Frequenzperiode besser zu verstehen, kann in Analogie zum Fabry-Perot Interferometer bzw. dem Dielektrikum eine Frequenzperiode  $\Delta f$  mit einer Länge  $d$  in Zusammenhang gebracht werden, über die sich einfallende und reflektierte Wellen entweder konstruktiv oder destruktiv überlagern. Dieser Zusammenhang ist für Vakuum:

$$\Delta f = \frac{c}{2d} \quad (23)$$

Über das Frequenzintervall von 40-480GHz befinden sich 9 Maxima. Das ergibt ungefähr eine Frequenzperiode von  $\Delta f=50\text{GHz}$ . Die Länge  $d$  für diese Frequenzperiode im Zylindermodell mit 1,5cm Länge ergibt sich über den Zusammenhang (23) zu 0,3cm. Für das Modell mit 2,5cm Länge und mit  $\Delta f=25\text{GHz}$  ergibt sich  $d=0,6\text{cm}$ .

Die Ergebnisse aus diesem Versuch deuten darauf hin, dass die Oszillationen mit der nicht perfekt absorbierenden *Radiating Only* Randbedingung und mit der Modelllänge in direktem Zusammenhang stehen. Die stehenden Wellen sieht man einerseits in Abbildung 11 in den Oszillationen,

sowie in Abbildung 10 bei konstanten Frequenzen.

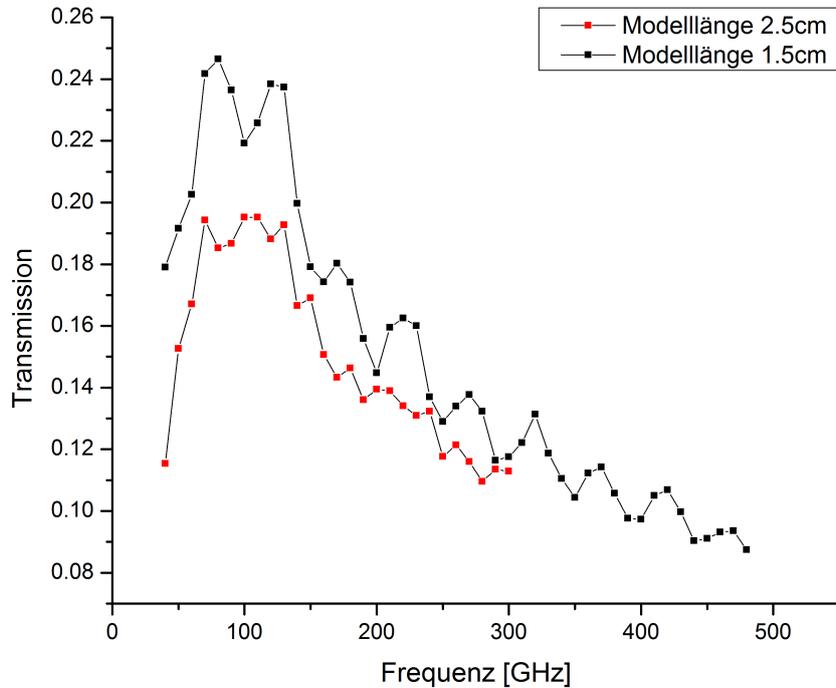


Abbildung 13: Transmission am Zylindermodell mit 2,5cm Länge im Vergleich zur Transmission am Zylindermodell mit 1,5cm Länge

In einem weiteren Versuch wurde die Transmission in einem Modell mit einer, wie in Abbildung 14 erkennbaren halbzyllindrischen Hinterwand berechnet. Alle Einstellungen im Solution Setup blieben unverändert. Die Messung der Intensität erfolgte an der selben Linie, wie im Modell mit 1,5cm Länge. Die Transmissionskurve, welche aus diesem Experiment erhalten wurde, ist in Abbildung 15 zu sehen. Man erkennt, dass die Transmission über alle Frequenzen gesunken ist. Dies hängt damit zusammen, dass nun ein größerer Anteil der Intensität an den Hinterwänden wirklich absorbiert und nicht mehr in den Modellraum reflektiert wurde. Im Oszillationsverhalten gibt es keine Verbesserung. Wie bereits herausgefunden wurde, hängen die Oszillationen mit der Modelllänge und den *Radiating Only* Randbedingungen zusammen. Die Reflexionen an der Modellhinterseite sind nun so gut wie möglich klein gehalten worden. Trotzdem hat sich die Frequenzperiode und Amplitude quasi nicht geändert. Das bedeutet, dass die Oszillationen hauptsächlich wegen der Überlagerung von einfallender und an den Zylindern reflektierten Wellen zu stehenden Wellen entstehen.

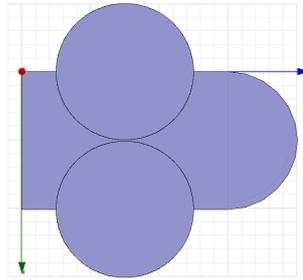


Abbildung 14: Ansicht des Modells mit halbzyklindrischer Hinterwand

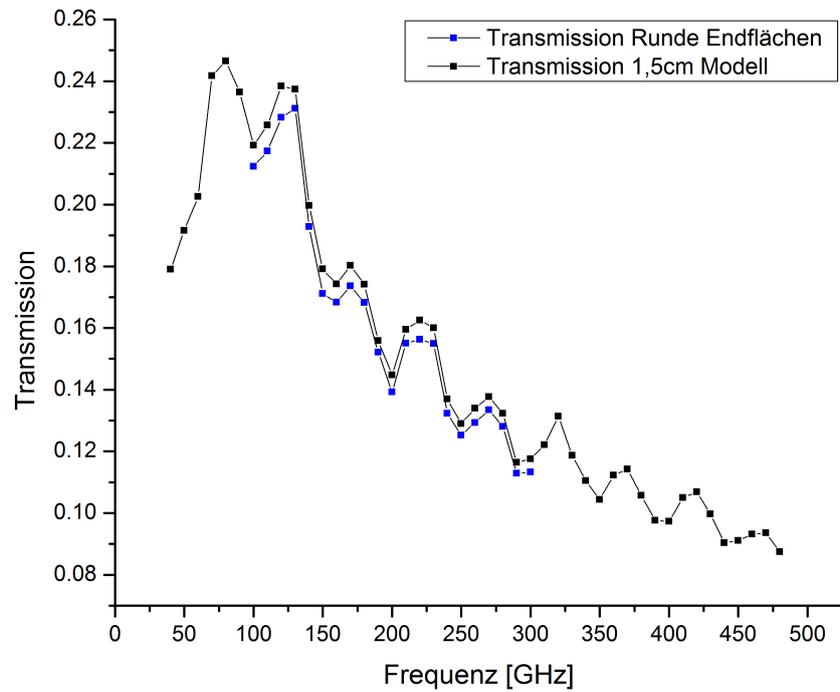


Abbildung 15: Transmission am Zylindermodell mit zylindrischer Hinterwand im Vergleich zur Transmission am Zylindermodell mit 1,5cm Länge

### 3.3 Niedrige Frequenzen

Nach dem Erreichen des Maximums bei etwa 100 GHz, sinkt die Transmission im niedrigfrequenten Bereich wieder. Das deutet darauf hin, dass die Transmission bei kleiner werdender Frequenz gegen Null geht. Ob dieses Verhalten wirklich zutrifft, sollte noch einmal überprüft werden.

Um die Berechnungen des Programms verifizieren zu können, muss man prüfen, ob die Lösung auch bei einem dichteren Netz immer noch stabil bleibt. Ist das der Fall, ist es die für das Problem mit den gegebenen Randbedingungen richtigste Lösung. Ist die Lösung für ein dichteres Netz signifikant verschieden von der ersten Lösung, so war der Fehler durch die endliche Netzdichte in der ersten Simulation noch zu groß und die Lösung ist falsch.

Es wurden für die Frequenzen 10, 20 und 40 GHz jeweils die Transmissionswerte mit einem zweiten Solution Setups berechnet. Die besseren Netzdichten in diesem Setup wurden erreicht, indem *Lambda Target* auf 0,01 eingestellt wurde. In Tabelle 1 befinden sich die Ergebnisse zu den Simulationen bei den zwei verschiedenen Netzdichten.

Frequenz [GHz]	Anzahl der Tetraeder	Transmission
10	190008	0,006511513
10	213441	0,006511514
20	190009	0,063628082
20	250998	0,063628056
40	189183	0,178988072
40	742780	0,178987930

Tabelle 1: Transmissionswerte aus Simulationen mit unterschiedlich dichten Netzen

Für alle drei Frequenzen unterscheiden sich trotz sehr großer Netzdichten die Transmissionswerte aus der zweiten Simulation maximal in der sechsten Stelle von jenen aus der ersten Simulation. Da sich die Werte für größere Netzdichten quasi nicht mehr ändern, sind die erhaltenen Werte die für dieses Programm bestmöglichen und richtigen Lösungen.

### 3.4 Experiment am Zylindermodell

#### Durchführung der Experimente

Um einen Vergleichswert zu der Simulation am Zylindermodell zu erhalten, wurde ein Experiment durchgeführt. Das Experiment ist, genauso wie die Simulation fehlerbehaftet. Das erschwert exakte Aussagen über den Transmissionsverlauf. Was interessant ist, ist jedoch der qualitative Vergleich der beiden Experimente.

Als Photonenquelle wurden drei verschiedene Geräte (BWOs: Backward Wave Oscillators), die jeweils einen anderen Frequenzbereich abdeckten, verwendet. Der Detektor (Bolometer) misst

die Intensität über die Erwärmung eines Widerstands durch die einfallende Intensität. Die elektromagnetischen Wellen wurden über einen Polarisationsfilter zur Probe, bestehend aus zwei Zylindern mit den Durchmessern von jeweils 1,5cm und einem Abstand von 0,015cm zueinander geleitet. Es wurden Experimente an drei verschiedenen Anordnungen durchgeführt.

Im ersten Experiment wurden zwei Linsen, eine vor und eine nach der Probe angebracht. Die Linsen wurden beide so justiert, dass das Signal ohne Probe maximal wurde. Die Linsen bewirkten eine Fokussierung der Strahlen zur Probe hin und nach erfolgter Transmission, eine Fokussierung der gebeugten Strahlen in den Detektor.

Im zweiten Experiment wurde die Linse vor der Probe entfernt. Die gebeugten Wellen wurden mit der Linse nach der Probe gesammelt und in den Detektor geleitet.

Es wurde auch ein Experiment ohne Linsen durchgeführt. Da die Strahlen hinter den Zylindern divergieren, gelangt nur noch ein Bruchteil der gesamten transmittierten Intensität zum Detektor.

Bevor die durch die Probe transmittierte Intensität gemessen wurde, wurde eine Kalibrationsmessung ohne dem Zylindermodell durchgeführt. Die Linsen und die Modellhalterung blieben während der Kalibrationsmessung im Strahlengang stehen. Die Werte der Messung mit Modell dividiert durch die Kalibrationsmesswerte ergeben die Transmission.

Die Linse vor dem Modell fokussiert den Strahl nicht in einen Punkt sondern auf Grund von Beugungseffekten an der Linsenöffnung in ein Bündel, welches auf das Modell trifft. In diesem Bündel ist die Welle immer noch eine ebene Welle.

Mit der Linse hinter dem Modell werden die divergierenden Wellen wieder gesammelt und in den Detektor fokussiert. Dadurch misst man quasi die Intensität über die Fläche der Linse. Fehlt diese Linse, wird die transmittierte Intensität nur noch über die Fläche der Detektoröffnung gemessen. Dabei geht viel transmittierte Intensität nicht mehr in die Messung ein. Nimmt man an, dass die über eine größere Fläche gemessene transmittierte Intensität bei jeder Frequenz um denselben Faktor größer ist, so unterscheidet sich die wahre Transmission auch nur um einen konstanten Faktor. Daher befindet sich in den Grafiken jeweils eine vierte Messkurve, welche die Transmission von der Messung ohne Linse mit dem Faktor sechs multipliziert darstellt. Dadurch wird der Verlauf der Kurve besser vergleichbar.

In Abbildung 16 und 17 sind die gemessenen Transmissionen jeweils schon mit der eingefügten Kurve aus der Simulation abgebildet. Der niedrigfrequente Bereich ist am stärksten fehlerbehaftet. Hier ist es nicht möglich Aussagen zu machen oder Vergleiche zu ziehen.

Die starken Schwankungen in den Messungen sind hauptsächlich auf die Ausbildung von stehenden Wellen innerhalb der Messapparatur zurückzuführen. Von dem Weg von der Quelle zum Detektor befinden sich Spiegel und Linsen an denen minimale Reflektionen auftreten. Bei gewissen Frequenzen bilden sich daher stehende Wellen aus, wodurch die Transmission klein wird. Daher schwanken die Messpunkte so stark. Eine Vorrichtung, um diesen Effekt zu minimieren ist schon in der Quelle umgesetzt. Anstatt einer monochromatischen emittierten Welle, variiert die Frequenz der emittierten Welle um einen Mittelwert. Bei der Mittelung über die Frequenzen fällt ein Einbruch in der Transmission bei einer bestimmten Frequenz nicht mehr so stark ins Gewicht.

Ein weiterer Fehler kommt von der Messung am Detektor. Dieser Fehler ist jedoch sehr klein und bei der Messung schon berücksichtigt worden. Jede Frequenz wird drei Mal gemessen und die Messung danach gemittelt. Dass der Fehler durch den Messapparat sehr klein ist, konnte durch zwei Messungen, die dividiert wurden gesehen werden. Die Quotienten sind immer mit minimalen Abweichungen um Eins gelegen.

### 3.5 Vergleich Simulation und Experiment

Um die Simulationsexperimentergebnisse mit den Ergebnissen des realen Experiments vergleichen zu können, müssen zunächst noch die Frequenzen umgerechnet werden. In der Simulation wurde ein Zylinderdurchmesser von 1cm verwendet, während im realen Experiment der Durchmesser 1,5cm betrug. Der Abstand zwischen den Zylindern maß in beiden Fällen ein Hundertstel des Durchmessers. Rechnet man die Längenskala des Simulationsexperiments auf die Skala des realen Experiments um, so werden auch die Wellenlängen und somit die Frequenzen von dieser Skalenstauchung betroffen.

Stellen die gestrichenen Längen die Längen im Simulationsexperiment dar und die ungestrichenen die im realen Experiment, so verhalten sich Längen folgendermaßen zueinander:

$$d = 1,5d' \quad \text{und} \quad \lambda = 1,5\lambda' \quad (24)$$

Frequenzen verhalten sich genau invers:

$$f = \frac{1}{1,5}f' \quad (25)$$

Die Abbildungen 16 und 17 zeigen nun die Ergebnisse des Simulationsexperiments und des realen Experiments einmal mit linearer und einmal mit logarithmischer Skala in einer Grafik zusammengefasst.

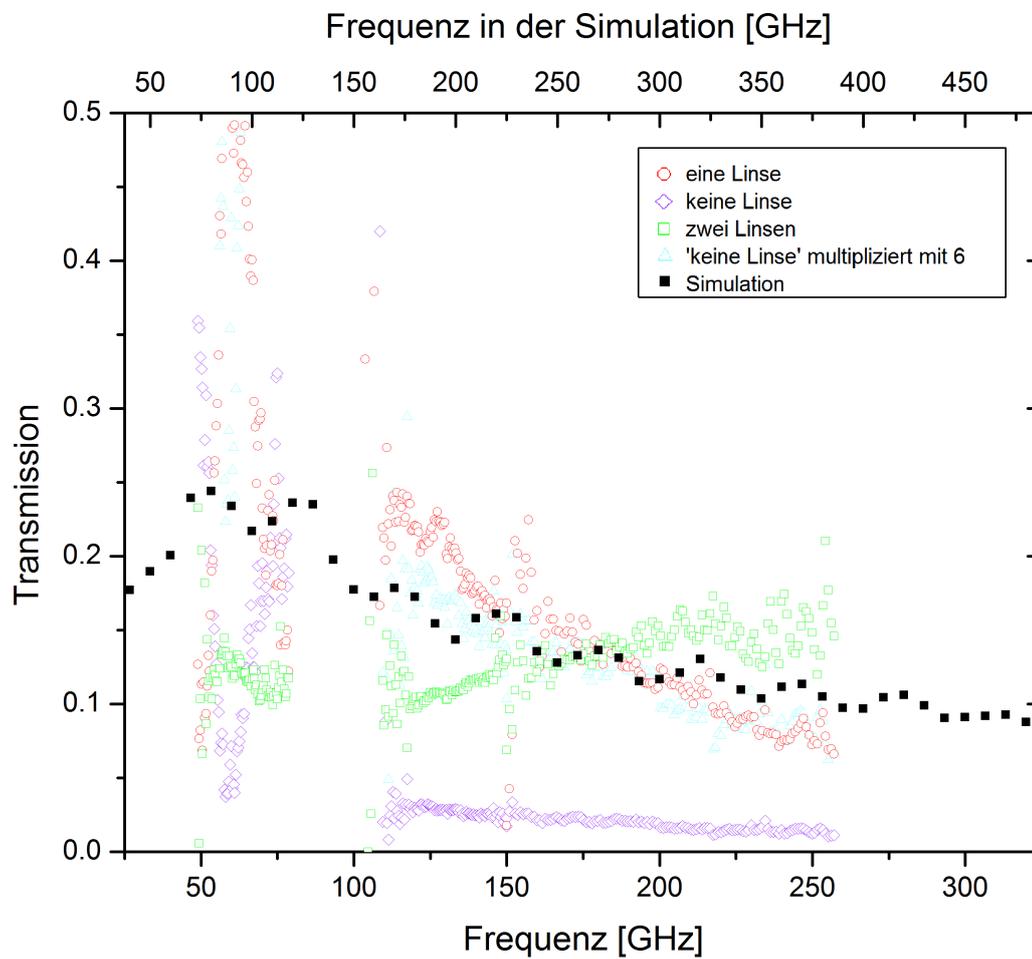


Abbildung 16: Vergleich des Experiments mit der Simulation mit Zylindern vom Durchmesser 1.5cm, lineare Skala

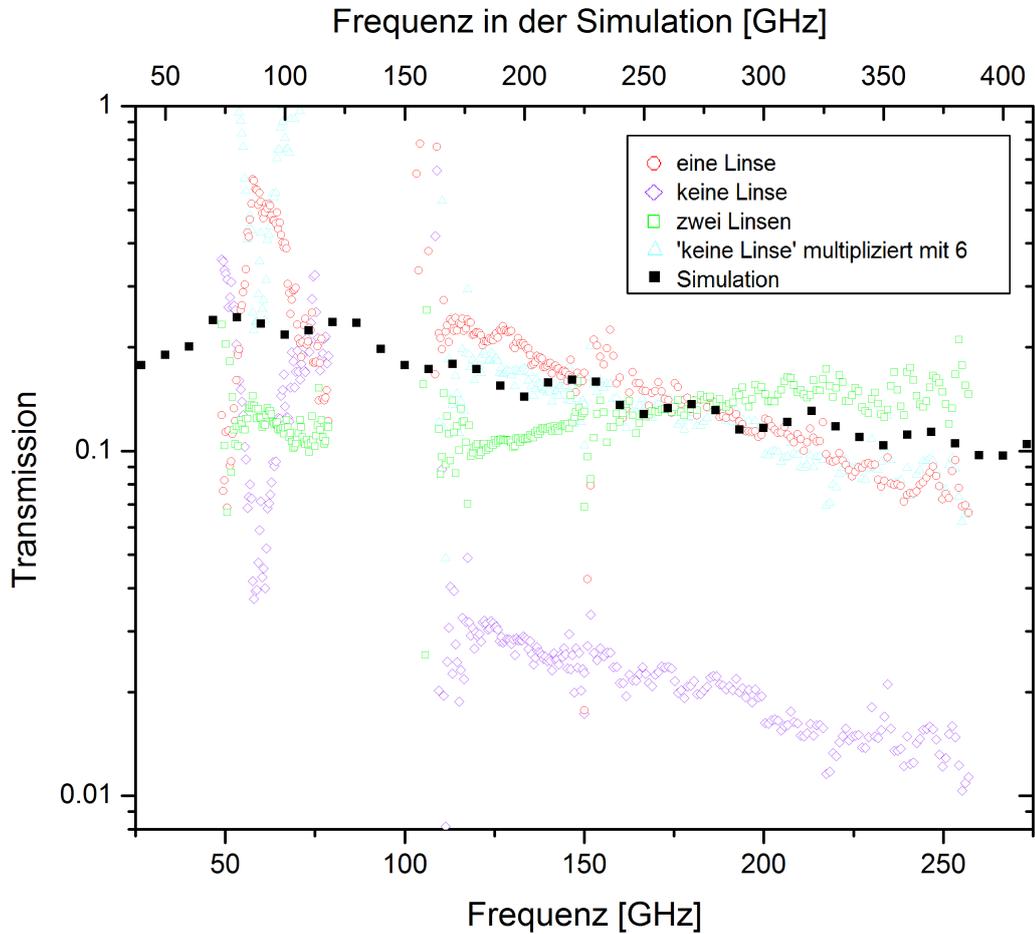


Abbildung 17: Vergleich des Experiments mit der Simulation mit Zylindern vom Durchmesser 1.5cm, logarithmische Skala

Auch in den Experimenten nimmt die Transmission mit steigender Frequenz ab. Die Steigung in den Kurven ist für die Messungen mit einer bzw. keiner Linse der Steigung aus der Simulation auch ähnlich. Einzig die Messung der Transmission mit zwei Linsen scheint auf den ersten Blick die Ergebnisse aus dem Simulationsexperiment nicht zu bestätigen.

Eine erste Vermutung war, dass der Durchmesser des Strahlenbündels nach der ersten Linse im Fokus sehr klein oder sehr groß im Vergleich zur Modellgröße ist und somit das Simulationsexperiment nicht richtig nachgestellt wurde. Die Formel für den Durchmesser des Strahlenbündels ( $d$ ) im Fokus (Brennweite  $F$ ) bei einem Linsendurchmesser  $D$  ist gegeben durch: [3]

$$d = 2,439 \frac{\lambda F}{D} \quad (26)$$

Da der Durchmesser des Strahlenbündels frequenzabhängig ist, wird ersichtlich, warum die

Messkurve bei zwei Linsen steigt und nicht sinkt. Da mit wachsender Wellenlänge der Bündeldurchmesser immer größer wird, erscheint dem Strahl an jedem Frequenzpunkt ein verschieden großer Ausschnitt des Modells, was zur Folge hat, dass die erhaltenen Transmissionswerte bei den einzelnen Frequenzen nicht mehr verglichen werden können.

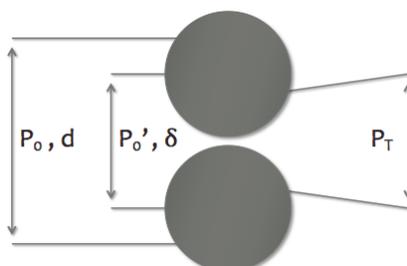


Abbildung 18: Skizze zur Erklärung der gemessenen Transmission im Experiment mit zwei Linsen. Um den Effekt, den der frequenzabhängige Bündeldurchmesser  $d$  auf die gemessene Transmission hat zu kompensieren, berechnet man sich den Transmissionskoeffizienten mit der über den fixierten Bereich  $\delta$  einfallenden Leistung  $P'_0$

Es soll nun der Einfluss des frequenzabhängigen Bündeldurchmessers auf die gemessene Transmission hergeleitet werden. Die in der Skizze eingeführte Größe  $P_0$  beschreibt die in der Kalibrationsmessung gemessene Leistung,  $P_T$  die gemessene transmittierte Leistung. Der Durchmesser  $d$  des Strahlenbündels ändert sich mit der Wellenlänge. Der gemessene Transmissionskoeffizient  $T$  ist daher:

$$T = \frac{P_T}{P_0} \quad (27)$$

Um einen Transmissionskoeffizient zu berechnen, welcher für alle Frequenzen dieselben Modellbedingungen verwendet, ist es sinnvoll eine Referenzlänge  $\delta$  zu definieren, über die alleine die einfallende Leistung,  $P'_0$  definiert wird. Abhängig von  $d$  und  $P_0$  ergibt sich  $P'_0$  zu:

$$P'_0 = \frac{\delta}{d} P_0 \quad (28)$$

Damit ergibt sich nun der Zusammenhang zwischen gemessener Transmission,  $T$  und tatsächlicher Transmission  $T'$  zu:

$$T' = \frac{P_T}{P'_0} = \frac{d}{\delta} \frac{P_T}{P_0} = \frac{d}{\delta} T \quad (29)$$

Mit Formel (26) für  $d$  eingesetzt ergibt sich:

$$T' = 2,439 \frac{\lambda F}{D \delta} T \propto \frac{T}{f} \quad (30)$$

Der hergeleitete Proportionalitätsfaktor wurde mit  $195 \cdot 10^9$  grob abgeschätzt. Die Schätzwerte betragen  $F \approx 20\text{cm}$ ,  $D \approx 5\text{cm}$  und  $\delta \approx 1,5\text{cm}$ . In Abbildung 19 werden  $T'$  und die Transmissionen aus den Experimenten mit einer Linse und ohne Linse für den Frequenzbereich von 103-257GHz miteinander verglichen. Beim Vergleich muss berücksichtigt werden, dass der Proportionalitätsfaktor ein Schätzwert ist und daher das Modell nur näherungsweise stimmen kann. Trotzdem konnte mit diesem Modell der ansteigende Verlauf in der ersten Messung erklärt werden.

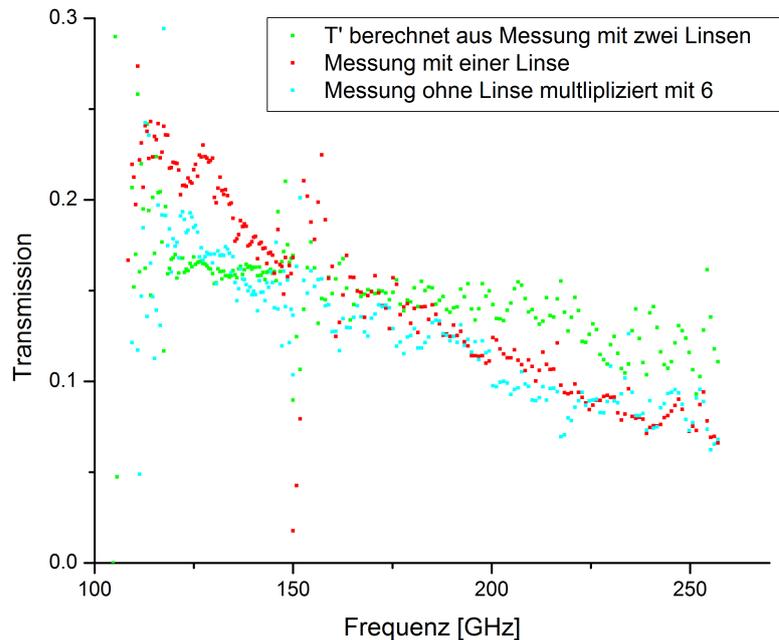


Abbildung 19: Die mit zwei Linsen gemessene Transmission, in Gleichung (30) hergeleitete tatsächliche Transmission  $T'$  und die Transmission aus dem Simulationsexperiment im Vergleich.

Um sich dem Frequenzbereich zu nähern, in dem sich die Kurve einer Konstanten nähert, wurden noch zusätzlich Experimente mit einer Quelle gemacht, die elektromagnetische Wellen in einem höherfrequenten Bereich emittieren kann. Das Ergebnis des Experiments kann in Abbildung 20 und 21 gesehen werden. Die Simulation in diesem Frequenzbereich wurde nicht mehr durchgeführt, da die Rechenleistung zu gering gewesen wäre und das Programm die Berechnungen abgebrochen hätte. Der Grund dafür ist, dass die Größe der Finiten Elemente immer der Wellenlänge angepasst werden. Bei Frequenzen von über 600GHz ( $\lambda=0,5\text{mm}$ ) würde die mittlere Seitenlänge der Finiten Elemente 0,3mm (mit  $\text{Lambda Target}=0,6$ ) betragen. Bei doppelter

Frequenz wäre das Netz schon doppelt so dicht, also ist auch der Rechenaufwand für 600GHz vierfach so groß wie bei 300GHz. Ein Ausweg wäre natürlich, die Länge des Modells nach vorne und hinten zu verkürzen, damit weniger Rechenleistung gebraucht wird. Dieses Verfahren würde jedoch auch größere Fehler verursachen.

Für höhere Frequenzen wird erwartet, dass sich der Transmissionswert konstant auf das Verhältnis von der Spaltbreite zur Modellkantenlänge einstellt. Dieser Wert wäre  $\frac{0,01}{1,01} \approx \frac{1}{100} = 0,01$ . Die Grenze zur geometrischen Optik, bei der die Wellenlänge kleiner als die Spaltbreite ist, wurde in den Experimenten zwar noch nicht erreicht, man ist ihr aber nahe gekommen. Die kürzeste Wellenlänge die im Experiment erreicht wird, ist 0,35mm. Der Spalt ist 0,15mm breit. Da die Transmission bei diesen Frequenzen der Konstanten schon sehr nahe ist, kann man diesen Messwert zum Vergleich mit der Theorie verwenden. Berechnet man den Mittelwert über den Messbereich kleiner Wellenlängen, so ergibt sich in sehr guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert eine Transmission von  $T = 0,0102 \pm 0,0063$ . Dieser Wert ergab sich aus den mit sechs multiplizierten Werten aus der Messung ohne Linsen. Es wurden diese Werte für die Berechnung gewählt, da im niedrigeren Frequenzbereich diese Kurve schon am besten mit der Simulation übereinstimmt.

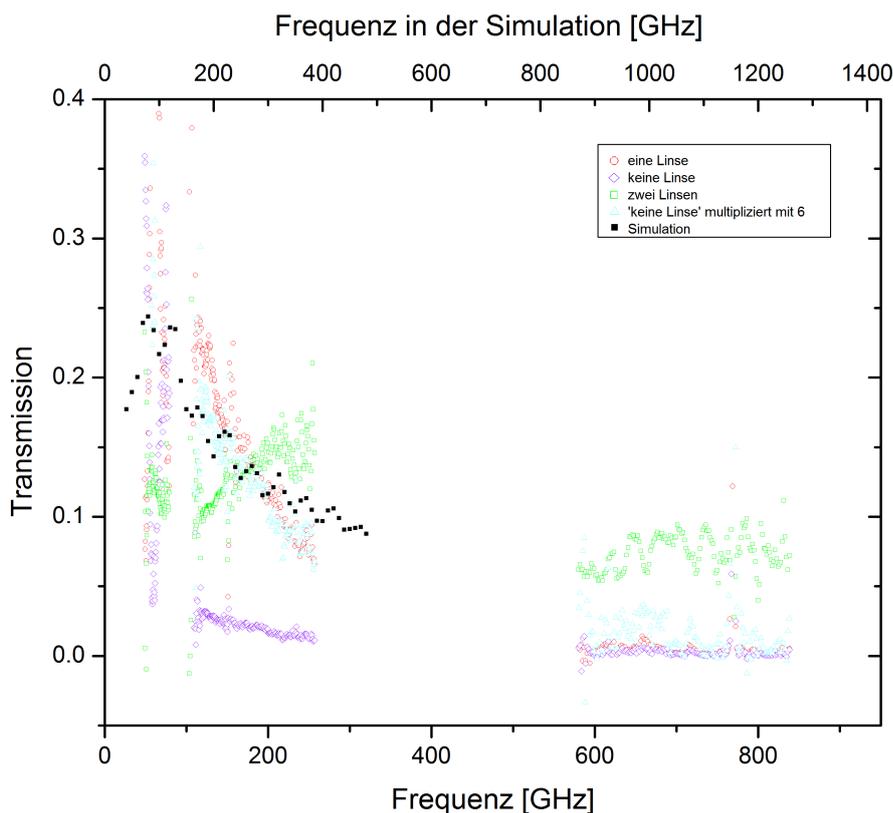


Abbildung 20: Erweiterter Messbereich bei Zylindern vom Durchmesser 1.5cm, lineare Skala

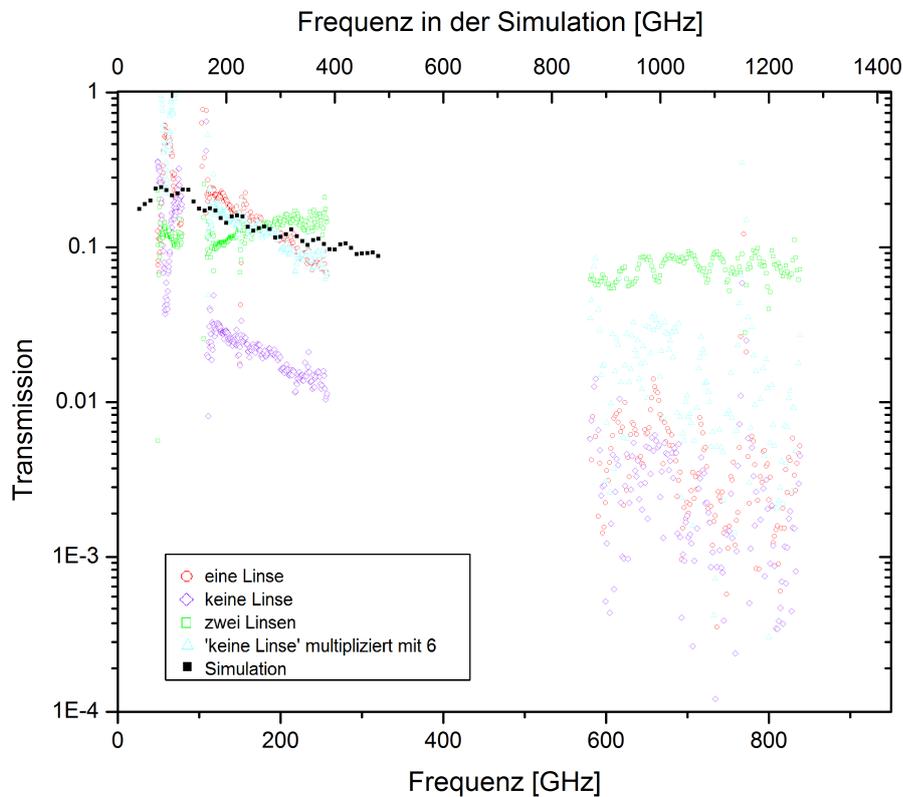


Abbildung 21: Erweiterter Messbereich bei Zylindern vom Durchmesser 1.5cm, logarithmische Skala

## 4 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, in Simulationsexperimenten sowie im realen Experiment die Transmissionskurve an zwei metallischen Zylindern zu finden.

Die Ergebnisse aus der Simulation sind fehlerbehaftet, jedoch konnten mit weiterführenden Experimenten manche dieser Fehler verstanden werden und es wurde mehr Information über den tatsächlichen Verlauf der Kurve gewonnen. So konnte erklärt werden, dass die auftretenden Oszillationen mit der Ausbildung stehender Wellen zwischen Modellvorderseite und Zylindern zusammenhängen.

In einem weiteren Experiment wurde versucht, den Verlauf im niedrigfrequenten Bereich zu überprüfen. Durch Berechnung der Transmission bei dichterem Netz wurde für die Frequenzen 10, 20 und 40 GHz die Transmission erneut berechnet. Da sich die Transmissionswerte trotz viel dichterem Netz nicht änderten, sind diese Werte die genauesten, welche mit dem Programm erreicht werden können.

Die Experimente an einem realen Zylindermodell konnten schließlich die Ergebnisse aus der

Simulation bestätigen. Weiters wurde versucht, den Grenzwert der geometrischen Optik zu erreichen, bei dem sich die Transmission einer Konstanten nähert.

## 5 Weiterführende Ideen

In nächsten Schritten könnte versucht werden, aus Simulationen eine Transmissionskurve zu berechnen, in welcher die Fehler, welche in Abschnitt 3.2 behandelt wurden, möglichst klein gehalten werden. Eine Idee, die Oszillationen, welche auf Grund der endlichen Größe des Modells und den nicht perfekt reflektierenden Randbedingungen entstehen, zu eliminieren wäre, Simulationen an Modellen mit verschiedenen Längen durchzuführen und anschließend an jedem Frequenzpunkt den Mittelwert der erhaltenen Werte zu berechnen.

Eine Vermutung ist, dass auch Plasmonen die Transmission mit beeinflussen könnten. Im Computermodell tritt dieses Phänomen jedoch nicht auf, da der metallische Charakter der Zylinder über die *Perfect E-field* Randbedingung angenähert wurde. Will man Materialeigenschaften und die auftretenden Phänomene mit berücksichtigen, so sollte man den Zylindern über die Materialzuweisung metallischen Charakter zuweisen. Da die Ausbreitungslänge von evaneszenten Wellen jedoch im Vergleich zur Geometrie sehr klein ist, wird vermutet, dass Plasmonen, wenn überhaupt nur eine sehr untergeordnete Rolle spielen.

Eine wichtige Frage ist auch die Frage nach dem Maximum in der Transmissionskurve. Im Frequenzbereich des Maximums gibt es nur die Ergebnisse aus der Simulation, da das Experiment hier keine brauchbaren Vergleichswerte liefert. In Experimenten konnte schon bestätigt werden, dass die Transmission nach dem Maximum tatsächlich für kleinere Frequenzen sinkt. In weiteren Experimenten könnte noch die Bedingung für das Maximum gefunden werden.

Will man im Experiment noch die Grenze zur geometrischen Optik erreichen, kann man die Messungen an einem größeren Modell durchführen. Für die Transmission wird in diesem Bereich ein konstanter Wert erwartet.

## Literatur

- [1] Ansoft corporation, user's guide- High Frequency Structure Simulator, Edition REV1.0, Chapter 1.1-1 (2005)
- [2] Ansoft corporation, user's guide- High Frequency Structure Simulator, Edition REV1.0, Chapter 2 (2005)
- [3] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 2, Fünfte Auflage, Kapitel 11.3 (2009)